

Christian Houzel et Michel Paty : Poincaré, Henri (1854-1912),
in *Encyclopædia Universalis* (Version CD-Rom), 1997.
(Repris dans :) *Encyclopædia Universalis, Dictionnaire de l'Astronomie*,
Encyclopædia Universalis/ Albin Michel, Paris, 1999, p. 696-706.

Poincaré, Henri (1854-1912)

Introduction

Biographie

Analyse. Equations différentielles et théorie des fonctions

Géométrie algébrique, algèbre, arithmétique et analysis situs

Mécanique céleste et systèmes dynamiques

Physique mathématique et physique théorique

Philosophie

Bibliographie

INTRODUCTION

Considéré comme le plus grand mathématicien de son temps, Henri Poincaré fut l'un des derniers représentants de cette science à en avoir eu une totale maîtrise dans tous les domaines, y compris dans ses applications en astronomie et en physique. Il y a apporté des contributions essentielles, ouvrant plusieurs champs nouveaux, insoupçonnés jusqu'à lui, à partir de problèmes qu'il choisissait parce qu'ils s'imposaient à son esprit dans leur nécessité, et élaborant lui-même, dans une créativité exceptionnelle, les outils mathématiques dont il avait besoin pour leur résolution. C'est avant tout en mathématiques pures qu'il a donné la pleine mesure de son génie, renouvelant la théorie des équations différentielles et des fonctions avec la découverte des fonctions fuchsiennes. Son oeuvre en mécanique céleste, où il appliqua et développa ses résultats de la théorie des équations différentielles, a marqué une nouvelle étape de cette discipline, apportant un nouveau jour sur le problème de la stabilité du système solaire, tout en ouvrant en même temps des perspectives de longue portée sur la théorie des systèmes dynamiques qui sont à l'origine de nombreux travaux contemporains.

Ses études sur la physique mathématique embrassent la mécanique des solides et des fluides, la thermodynamique, l'optique et l'électromagnétisme. Ses travaux sur ces deux derniers domaines culminent avec son étude de 1905 "Sur la dynamique de l'électron" où il formulait, en même temps qu'Einstein, la pleine prise en compte du principe de relativité pour l'électromagnétisme et développait une théorie relativiste (au sens restreint) de la gravitation.

Henri Poincaré eut par son enseignement et le rayonnement de sa pensée une influence considérable sur de nombreuses générations de mathématiciens et de physiciens, en France comme au niveau international. Il est en outre l'auteur d'une oeuvre originale en philosophie des sciences, qui a été d'une grande importance pour le développement des idées au vingtième siècle.

BIOGRAPHIE

Jules Henri Poincaré est né à Nancy le 29 avril 1854, d'une famille de la bourgeoisie lorraine. Son père, Léon, était professeur de médecine à l'Université de Nancy. Sa jeune soeur, Aline, devait épouser le philosophe Emile Boutroux. Il était cousin de Raymond Poincaré, qui fut président de la République française durant la Première Guerre Mondiale, et de Lucien Poincaré, qui occupa de hautes fonctions dans l'Université.

Il manifesta très tôt des dons exceptionnels en mathématiques, et de grandes facilités intellectuelles dans toutes les matières. Elève au Lycée de Nancy, il termina ses études secondaires avec les baccalauréats littéraire et scientifique. Admis premier à l'Ecole Polytechnique en 1873, il entra à l'Ecole des Mines en 1875, et prépara également une licence ès-sciences qu'il obtint en 1876. Il commença par exercer ses fonctions d'ingénieur, tout en préparant en même temps une thèse de doctorat ès-sciences mathématiques sous la direction de Charles Hermite, qu'il soutint en 1879, et qui lui ouvrit la carrière universitaire. Chargé de cours à Caen, il fut nommé deux ans après maître de conférences à la Sorbonne. Il se maria en 1881 et eut trois filles et un fils.

Professeur en 1886, il fut d'abord titulaire de la chaire de Physique mathématique et calcul des probabilités de la Sorbonne. Ses travaux de mécanique céleste et d'astronomie mathématique lui valurent d'occuper plus tard, à partir de 1896, la chaire de Mécanique Céleste, et d'être en même temps professeur d'Astronomie générale à l'Ecole Polytechnique, de 1904 à 1908. Il enseigna également à l'Ecole professionnelle des Postes et Télégraphes, de 1904 à 1910.

Ses cours en Sorbonne ont, au long des années, porté sur à peu près toutes les branches des mathématiques pures et appliquées, y compris sur tous les sujets intéressant la physique mathématique. Loin de se contenter de reproduire les connaissances bien établies de l'époque, Poincaré y présentait et discutait les recherches les plus récentes et dignes d'intérêt. C'est ainsi qu'il introduisit en France la théorie de Maxwell et fit connaître les travaux de Hertz, de Helmholtz et surtout de Lorentz sur l'électrodynamique. Ses études critiques des théories l'amènèrent à faire de nombreuses découvertes originales. Son oeuvre écrite comporte plus de 500 mémoires originaux et une trentaine de livres, dont quatre traitent de questions philosophiques.

Membre de l'Académie des sciences en 1887, à l'âge de 32 ans, il obtint, en 1889, le prix du Roi de Suède pour son étude sur "Le problème à trois corps et les équations de la dynamique", que suivirent de nombreux autres prix et distinctions. Docteur *honoris causa* de huit universités, membre étranger ou correspondant de quarante académies et sociétés scientifiques du monde entier,

commandeur de la Légion d'honneur en 1903 et de l'Etoile polaire de Suède en 1905, il fut également élu en 1908 à l'Académie française, et appelé à la présider peu avant sa mort, en 1912.

Henri Poincaré mourut prématurément à Paris, à l'âge de 58 ans, le 17 juillet 1912, des suites d'une opération de la prostate.

ANALYSE. EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET THEORIE DES FONCTIONS

Dans sa thèse de 1778 sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes, Poincaré développa une méthode de résolution dans la ligne des travaux de Cauchy sur la théorie des fonctions d'une variable complexe. Ce faisant, il proposait des notions nouvelles et importantes pour l'analyse comme les fonctions à espaces lacunaires et les fonctions algébroides.

Il se consacra ensuite à la théorie des équations différentielles ordinaires, qu'il a abordée de deux points de vue différents. Le premier concerne le champ réel, où il fait une étude qualitative des courbes qui représentent les solutions. Dans le cas du premier ordre, la forme de ces courbes est déterminée par les *points singuliers* de l'équation (où le champ de vecteur s'annule), ses *cycles limites* (courbes solutions fermées) et les *cycles sans contact* (avec les courbes solutions). Les points singuliers sont de différents types : par les "cols" passent deux courbes; aux "noeuds" une infinité de courbes se croisent; les courbes tournent autour des "foyers" en s'en rapprochant indéfiniment; il existe aussi dans certains cas des "centres" entourées par les courbes qui s'enveloppent successivement. Etudiant la distribution de ces diverses espèces de points, Poincaré établit une relation entre leurs nombres analogue à celle établie par Euler entre les nombres de faces, de côtés et d'arêtes d'un polyèdre. Il parvint à établir que les courbes solutions sont en général des spirales entre des cycles limites ou entre un cycle limite et un foyer. Poincaré étendit plus tard ces résultats à des systèmes d'équations différentielles plus généraux. Il put également établir que les solutions réelles d'un tel système peuvent être définies par des séries toujours convergentes de puissances d'une variable auxiliaire réelle, précisant ainsi et généralisant un résultat de Cauchy.

Le deuxième point de vue concerne le champ complexe ; Poincaré chercha à construire une classe de fonctions transcendentes permettant d'intégrer exactement toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Ce problème l'amena à construire les fonctions fuchsienues et kleinéennes (on dit aussi maintenant "fonctions automorphes" sur le modèle de celle des fonctions elliptiques). Guidé par l'exemple des *fonctions modulaires elliptiques* étudié par Ch. Hermite et par la propriété de l'équation hypergéométrique, il chercha les groupes discontinus des transformations hyperboliques $\left(\frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d = \text{const.}\right)$ qui n'altèrent pas le *cercle fondamental* (défini dans le plan complexe, avec l'origine pour centre et de rayon unité).

Il eut alors l'idée que ces transformations forment le groupe des

déplacements de la géométrie plane non euclidienne, et put construire ainsi tous les groupes discontinus contenus dans le groupe hyperbolique (groupes fuchsien), ainsi que les fonctions uniformes de z non altérées par les opérations d'un tel groupe (fonctions fuchiennes). Les fonctions kleinéennes et les groupes correspondants sont ceux qui ne conservent pas le cercle fondamental, et sont obtenus par la géométrie non euclidienne en dimension 3.

Poincaré formula, à partir de ses résultats sur ces fonctions "automorphes", un grand nombre de propriétés algébriques sur les équations et les courbes. Les fonctions fuchiennes relatives à un même groupe sont liées par une équation algébrique. Les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchiennes, donc par des fonctions uniformes d'un même paramètre. L'intégration des équations linéaires à coefficients algébriques d'un ordre quelconque qui peut être obtenue à l'aide de certaines fonctions appelées *zétafuchiennes*. Les fonctions fuchiennes sont représentées par des quotients de séries *thétafuchiennes*.

Poincaré donna également des contributions d'importance fondamentale et pionnières à la théorie - alors à peine ébauchée - des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Il montra, en 1883, en utilisant la théorie du potentiel et le principe de Dirichlet (voir plus bas) pour la fonction $\text{Log}|F|$, qu'une fonction F méromorphe de deux variables complexes est toujours le quotient de deux fonctions entières. Plus tard, il appliqua la même méthode pour construire les fonctions *théta* de plusieurs variables complexes, dont les quotients représentent les fonctions abéliennes. Il prolongea ensuite ces travaux en mettant en évidence les problèmes de nature nouvelle auxquels conduisait l'extension aux fonctions de deux variables complexes, de la notion de "revêtement conforme", et dont la théorie actuelle des variétés et des espaces analytiques est directement issue. Enfin il généralisa la notion de "résidu" aux intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables complexes.

GEOMETRIE ALGEBRIQUE, ALGEBRE, ARITHMETIQUE ET ANALYSIS SITUS

Outre les résultats algébriques obtenus à partir de l'étude des fonctions automorphes, Poincaré s'intéressa, dès 1881, aux fonctions abéliennes et à la géométrie algébrique, dans la suite des travaux de Riemann et de Weierstrass. Il démontra le "théorème de réductibilité complète" des variétés abéliennes (décomposition en variétés simples d'intersections finies), d'où il tira de nombreux résultats. et fit d'autres découvertes importantes en géométrie algébrique, sur les courbes algébriques inscrites sur une surface algébrique.

En algèbre, il s'intéressa à la théorie des groupes (continus) de Lie, formulant un théorème fondamental dans ce domaine (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt).

En théorie des nombres, il proposa de classer les problèmes diophantiens selon l'équivalence birationnelle à coefficients rationnels des variétés algébriques correspondantes. Dans le cas d'une équation $f(x,y)=0$ correspondant à une courbe de *genre* 1, il utilisa le paramétrage de cette courbe par des fonctions elliptiques, introduisant implicitement une structure de groupe sur l'ensemble des

points; il supposait apparemment que le sous-groupe des points rationnels est fini, et ceci fut établi par Mordell en 1922.

En relation à ses travaux sur l'intégration qualitative des équations différentielles, Poincaré développa (dès 1894) ce qu'il appela l'*analysis situs*, ou géométrie de situation, c'est-à-dire la topologie algébrique, dont l'origine remonte à Riemann. L'*analysis situs* concerne les propriétés invariantes d'une figure lorsqu'on la déforme de manière continue quelconque, sans déchirure (par exemple, dans le cas de la déformation de la sphère, les propriétés corrélatives des objets tracés sur sa surface). Poincaré précisa le rôle des "nombres de Betti" qui caractérisent l'"ordre de connexité" d'une variété à plusieurs dimensions (dont ils sont des "invariants homologiques"), montrant l'existence d'un invariant plus fin, le "groupe fondamental". C'est dans ce cadre qu'il généralisa le théorème d'Euler sur les polyèdres (voir plus haut). Il démontra le théorème de dualité sur l'homologie d'une variété, et définit également d'autres invariants homologiques, les nombres "de torsion".

MECANIQUE CELESTE ET SYSTEMES DYNAMIQUES

Etudiant, en 1885, le comportement d'une masse fluide en rotation dans un champ de forces, Poincaré analysa de manière systématique les conditions d'équilibre, en utilisant le développement en séries des périodes d'une fonction elliptique. Il put mettre en évidence que, dans une même série, ces figures dépendent d'un paramètre variable, qui détermine le type de la figure d'équilibre. A chaque figure est attachée une suite infinie de coefficients dits *de stabilité*: quand ces derniers sont tous positifs, la condition de stabilité est vérifiée; quand l'un d'eux s'annule, la figure est *de bifurcation*. Si une figure appartient à deux séries différentes, l'on a une figure d'équilibre de bifurcation: ces deux séries échangent leur stabilité (par ex., l'une des séries correspond à des équilibres stables jusqu'à la bifurcation, et instables ensuite). Poincaré montra ainsi que les ellipsoïdes de révolution et certains ellipsoïdes à trois axes inégaux (de Jacobi), solutions d'équilibre connues, possèdent une stabilité séculaire, les autres figures d'équilibre (en anneau, ou tore) étant instables, à l'exception d'une nouvelle figure, en forme de poire.

Il appliqua ces résultats aux anneaux de Saturne, montrant qu'ils ne peuvent satisfaire aux conditions d'équilibre d'un fluide et doivent donc être composés d'une multitude de très petits satellites.

D'une manière générale, les travaux de Poincaré en mécanique céleste et en dynamique se fondent sur l'étude des propriétés remarquables des équations de la dynamique, mises en évidence par Jacobi, et dont il se préoccupa d'exprimer les conséquences. Etudiant les changements de variables qui conservent la forme canonique des équations, il montra que de telles transformations facilitent la mise en équation du problème des trois corps (il rapporta les coordonnées de chaque planète au Soleil, et leurs vitesses à des axes fixes), et introduisit la notion nouvelle d'"invariants intégraux" (il s'agit d'intégrales définies qui demeurent constantes quand le champ d'intégration varie selon une loi définie par une équation

différentielle, tel le volume dans le mouvement d'un fluide incompressible). C'est ainsi qu'il parvint à des résultats d'une importance considérable dans son mémoire "Sur le problème à trois corps et les équations de la dynamique", qui lui valut le prix du Roi de Suède en 1889. Il reprit et développa ce travail dans son ouvrage en trois volumes, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.

S'attachant d'abord aux propriétés qualitatives dans le problème des trois corps, il montra que ce dernier n'admet pas, en général, de solutions représentées par des séries trigonométriques convergentes, sauf si l'on choisit les conditions initiales du mouvement telles que les distances mutuelles entre les trois masses soient des fonctions périodiques du temps. Poincaré étudia les solutions périodiques du problème, ainsi que d'autres types de solutions qu'il mit en évidence, et dont il étudia les propriétés à l'aide des invariants intégraux: "asymptotiques" (se rapprochent infiniment d'une solution périodique, ou s'en éloignent sans cesse si elles en ont été infiniment éloignées à $t=-\infty$), périodiques de deuxième espèce (deux des corps se rapprochent périodiquement à se toucher) ou encore du deuxième genre (la variation continue de l'une des masses entraîne la déformation continue d'une solution périodique du premier genre donnant trois solutions périodiques très voisines, l'une avec la période T , les deux autres avec des périodes multiples de T), enfin, "doublement asymptotiques" (infiniment voisines d'une solution périodique à $t=-\infty$ et $t=+\infty$, et s'en éloignant puis s'en rapprochant dans l'intervalle).

Appliquant ces résultats qualitatifs, mais obtenus en toute rigueur, au problème de la stabilité du système solaire, il obtint des résultats partiels, tel celui de la "stabilité à la Poisson" : dans le cas de deux corps ayant des orbites sans excentricité et un troisième de masse nulle, le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa situation initiale.

Poincaré se occupa également de faire des développements approchés en vue d'applications aux problèmes pratiques considérés par les astronomes. Il montra que la convergence d'une série trigonométrique n'est pas une condition suffisante de la limitation de la fonction représentée par cette série, contrairement à ce qu'on croyait avec Laplace: si la convergence n'est pas uniforme, la fonction peut devenir très grande et soit aller à l'infini soit subir une infinité d'oscillations successives, ce qui reposait la question de la démonstration de la stabilité du système solaire, et montrait qu'elle échappait au fait de faire rentrer le temps dans les termes sinus et cosinus. Il précisa dans quelles conditions l'emploi des séries divergentes est légitime, montrant comment le terme séculaire qui apparaît à chaque ordre d'approximation dans la méthode de Lindstedt est toujours unique et peut donc être éliminé. Il développa la méthode plus générale de Newcomb, où plusieurs termes sont à éliminer, montrant que l'élimination d'un terme provoque la disparition spontanée d'un autre, ce qui permet de développer en série - et donna le moyen de former directement ces séries. Il appliqua ces résultats à la théorie de la Lune, où apparaît l'importance des solutions périodiques.

Les travaux mathématiques de Poincaré sur la théorie des équations différentielles l'amènèrent naturellement à s'intéresser à la physique mathématique, en raison du lien de ces équations, en particulier les équations aux dérivées partielles du second ordre, dont la plus simple est celle de Laplace, $\Delta u = 0$, avec les lois des phénomènes physiques les plus divers. La distribution électrique, le magnétisme, l'hydrodynamique, les équations de vibration des membranes, les marées, le potentiel newtonien, la théorie analytique de la chaleur, sont décrits par des équations de ce genre.

Poincaré s'attacha à la mise en évidence de la possibilité de ces problèmes et à leur résolution au moyen de séries de fonctions harmoniques (Fourier, Laplace, etc.), montrant l'existence de ces fonctions, calculant les coefficients des séries, démontrant leur convergence. Il reprit de manière systématique le "problème de Dirichlet", étudié par Riemann et d'autres, qui apparaît dans de nombreuses situations de physique mathématique, et qui "consiste à déterminer une fonction V satisfaisant à l'équation de Laplace à l'intérieur d'une certaine région et qui prenne sur la surface qui limite cette région des valeurs données". Il donna une nouvelle démonstration du principe de Dirichlet par l'invention de sa méthode dite "du balayage", et en l'utilisant pour démontrer son théorème selon lequel, si l'on considère une fonction analytique quelconque, la fonction et sa variable peuvent être exprimées par des fonctions uniformes (méromorphes) d'une variable auxiliaire.

Poincaré a également porté son attention sur la théorisation des phénomènes physiques tels qu'ils sont donnés dans l'expérience, dans laquelle il voyait un autre volet de la "physique mathématique", et qui constitue la physique théorique au sens propre. Dans ses cours et dans de nombreux articles et communications, il s'est attaché "à passer en revue les différentes théories physiques et à les soumettre à la critique", tout en marquant un intérêt très précis pour la physique expérimentale. Cet intérêt se voit notamment à l'attention qu'il a consacrée aux expériences de Hertz sur les ondes électromagnétiques l'"experimentum crucis" de la théorie de Maxwell. De même, il s'est occupé des rayons cathodiques et des rayons Röntgen (X), et suggéra l'idée qui devait mettre Henri Becquerel sur la voie de la découverte de la radioactivité.

En théorie des probabilités, il obtint en 1886 des résultats importants comme le théorème de Bayes-Poincaré sur les probabilités composées, s'intéressa aux applications de la théorie dans les expériences de la physique (théorie des erreurs) et dans la théorie cinétique des gaz. En thermodynamique, il donna, dans sa *Théorie analytique de la propagation de la chaleur* (1885), des méthodes nouvelles pour le développement en séries de fonction fondamentales, et dans son livre *Thermodynamique* (1892), fournit deux démonstrations différentes du théorème de Clausius sur les cycles non réversibles ($\int \frac{dQ}{T} < 0$), montrant qu'une explication mécanique de l'irréversibilité est peu vraisemblable. Dans son cours, non publié, de 1893, sur la théorie cinétique des gaz, il examina et réfuta des objections de Lord Kelvin au théorème de Maxwell-Boltzmann et chercha à concilier cette théorie avec l'irréversibilité.

Ses résultats sur les équations de la dynamique et le problème des trois

corps entraînent cette propriété que les lignes d'un champ de vecteurs de divergence nulle ne se ferment qu'exceptionnellement, mais repassent en général une infinité de fois aussi près que l'on veut d'un point où elles sont déjà passées: on peut les considérer comme pratiquement fermées. Poincaré prit sa part dans le débat suscité par Zermelo, qui posa le problème de concilier cette propriété des systèmes dynamiques avec le "théorème H" de Boltzmann établissant l'irréversibilité des passages, pour un grand nombre de molécules, d'une configuration initiale quelconque à la configuration la plus probable.

Par ailleurs, il appliqua, dans ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, la théorie cinétique et la mécanique statistique à l'étude des systèmes stellaires (nébuleuses).

Poincaré s'est également penché sur la théorie générale de l'élasticité, apportant des contributions précises et originales. Mais son domaine de prédilection en physique fut l'optique et la théorie électromagnétique de la lumière. L'optique, qu'il étudia dans sa *Théorie mathématique de la lumière*, se présentait d'abord comme une application directe des théories de l'élasticité à l'éther lumineux, qu'il contribua à expliciter, mais qui le laissa vite insatisfait, et il se porta vers les théories explicatives de l'électromagnétisme, qu'il examina notamment dans *Electricité et optique*. Il passa en revue les principales théories de l'électrodynamique et reconnut la supériorité de la théorie de Maxwell, qu'il contribua puissamment à faire accepter sur le continent, tout en la réinterprétant à sa façon.

Les problèmes de l'optique des corps en mouvement, dont il avait constaté l'importance en optique mathématique, requièrent une grande part de son attention en ce qui concerne la théorie électromagnétique de la lumière. Conscient de l'importance d'une explication du coefficient d'entraînement de l'éther de Fresnel qui expliquait l'aberration des étoiles et l'expérience de Fizeau, il souligna la supériorité, sur les autres théories proposées qu'il passa toutes en revue, de la théorie électrodynamique de Lorentz, et il s'attacha à la perfectionner en relation étroite avec ce dernier.

Ces recherches culminèrent avec son travail de 1905 "Sur la dynamique de l'électron", paru dans le *Bulletin du Cercle mathématique de Palerme*, dans lequel il propose, parallèlement au travail d'Einstein sur la relativité restreinte, une théorie relativiste de l'électrodynamique. Il formula en outre une approche "covariante" (au sens restreint) de la gravitation utilisant pour la première fois la méthode, aujourd'hui classique, de la recherche des invariants de Lorentz. Sa proposition de représenter le temps comme quatrième coordonnée d'espace ($x_4 = t\sqrt{-1}$), devait être reprise dans l'espace-temps de Minkowski.

Dans son dernier travail théorique sur la physique, Poincaré mit en évidence le caractère irréductible de la discontinuité quantique au niveau atomique - déjà affirmé par Einstein, mais non accepté par Planck lui-même -, c'est-à-dire le fait que les phénomènes d'émission et d'absorption de la lumière par des atomes ne peuvent être représentés par des équations différentielles. Il ne fallut rien de moins que la grande autorité de Poincaré pour faire accepter ce résultat qui ouvrait la voie à un type d'approche de la physique théorique très différent de celui qui avait prévalu jusqu'alors.

PHILOSOPHIE

Poincaré manifesta très tôt un vif intérêt pour la philosophie, notamment pour les problèmes de la connaissance, collaborant régulièrement à la *Revue de métaphysique et de morale* dès sa fondation, rédigeant de nombreux articles de “philosophie scientifique”, rassemblés dans quatre recueils : *La science et l'hypothèse* (1902), *La valeur de la science* (1905), *Science et méthode* (1908), et *Dernières pensées* (ouvrage posthume, 1913). Ces ouvrages, caractérisés par la clarté de l'exposition et une grande lisibilité, sont devenus des classiques de la philosophie des sciences du vingtième siècle.

Sans faire sienne aucune philosophie particulière, Poincaré a développé une pensée critique originale centrée sur la nature et les raisons du savoir scientifique, qui insiste en même temps sur le rôle de l'expérience et des faits et sur celui du travail de l'esprit dans la constitution des théories scientifiques. Cette philosophie, qui reflète sa méditation sur les mathématiques et sur leur rapport au monde réel à travers la “physique mathématique”, paraît prendre sa source dans sa pensée de la géométrie, et dans sa propre expérience des géométries non euclidiennes.

Pour Poincaré, la science postule le déterminisme, qui est posé par nous. Elle a son domaine qui lui est propre, et ne peut pas fonder la morale. La partie qui lui semble la plus intéressante de la philosophie de la connaissance est celle qui concerne l'invention, qui nous révèle les caractères les plus profonds de la pensée scientifique. Poincaré ne pense pas, contre les logicistes - notamment Frege et Russell -, que les mathématiques soient réductibles à la logique : le raisonnement mathématique a une consistance et une dynamique qui lui sont propres; il implique l'établissement de connexions qui sont de nature extra-logique et relèvent de l'intuition, et qui renvoient au sujet mathématicien (comme, par exemple, dans le processus de l'induction mathématique).

En partie inspiré par la doctrine kantienne, Poincaré fait une place décisive, dans le raisonnement scientifique, aux jugements synthétiques a priori, qu'il ramène au “principe d'induction complète” ou raisonnement par récurrence, et leur adjoint, outre les jugements analytiques et empiriques, une quatrième sorte de jugements, ceux de convention, basés sur l'expérience mais librement choisis par notre esprit pour la commodité et la simplicité qu'ils octroient dans l'explication des faits.

En ce qui concerne la nature des mathématiques, il s'oppose aussi bien aux empiristes qu'aux formalistes et aux logicistes. Le continu mathématique n'est ni donné uniquement par l'expérience, ni pure construction logique des arithméticiens: cette construction n'est faite que parce que l'on avait déjà une idée des longueurs incommensurables. Estimant qu'il n'y a de science que du fini, et excluant tout objet mathématique qui ne peut pas être défini en un nombre fini de mots, Poincaré rejette l'infini actuel (au sens de Cantor) pour l'infini potentiel, sur lequel on peut raisonner grâce à l'induction complète (p. ex.: on peut engendrer la

suite des nombres), et sans l'idée duquel il n'y aurait pas de mathématiques. Contre les logicistes, Poincaré demande une légitimité des axiomes, qu'il refuse d'assimiler à de simples définitions, ne pensant pas qu'on doive les admettre indépendamment de tout sens, et demandant de garder la mémoire de leurs origines et de leur genèse psychologique.

En ce qui concerne les fondements de la géométrie, le synthétique a priori doit être rejeté, à la différence de l'arithmétique, en raison de l'existence de plusieurs géométries. Mais le caractère exact et certain des propositions géométriques, une fois admis leurs axiomes, les fait également échapper aux jugements empiriques. L'origine des idées géométriques réside dans l'expérience sensible des corps solides - à partir desquels l'entendement construit l'espace abstrait de la géométrie - et l'objet de la géométrie est à proprement parler le groupe des déplacements des corps solides naturels (idéalisés) dans l'espace, et non pas l'espace, qui n'a pas de propriété indépendamment des corps qu'il contient. On choisit une géométrie par convention, et les conventions de la géométrie resteront toujours invérifiables, car toute expérience relative à la légitimité du choix d'une géométrie met en jeu des expériences de mécanique (corps solides) ou d'optique (rayons lumineux).

Pour Poincaré, les mathématiques ne nous disent pas ce que sont les choses, mais seulement ce que sont les relations entre les choses. Le but des théories mathématiques lorsqu'on les applique à la nature, n'est que "de coordonner les lois physiques que l'expérience nous fait connaître, mais que sans le secours des mathématiques nous ne pourrions même énoncer". Si les mathématiques s'appliquent à l'étude des phénomènes physiques, c'est parce qu'il y a dans la nature de l'unité, de la simplicité et de la continuité. La science est fondée sur cette croyance, qui correspond à nos constatations et que nous généralisons.

En ce qui concerne les concepts, les principes et les théories physiques, la position de Poincaré est une combinaison de conventionalisme et d'empirisme. Les principes sont d'origine empirique, mais, formulés de façon systématique à la lumière de la théorie qui les implique, ils se transforment en une convention de définition. Ces conventions nous sont suggérées par l'expérience, mais nous les adoptons librement. Pour le reste, il suffit que les hypothèses soient commodes, et l'on peut admettre, pour un même ensemble de faits, plusieurs théories différentes.

BIBLIOGRAPHIE

Oeuvres de Poincaré

- *Potentiel et mécanique des fluides*, Carré, Paris, 1885-1886.
- *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, Carré, Paris, 2 vols., 1889, 1892.
- *Electricité et optique*, Carré, Paris, 2 vols., 1890-1891. Deuxième édition revue et augm., Carré et Naud, Paris, 1901.
- *Thermodynamique*, Carré, Paris, 1892.
- *Théorie de l'élasticité*, Carré et Naud, Paris, 1892.

- *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 3 vols.: vol. 1, 1892; vol. 2, 1893; vol. 3, 1899.
- *Théorie des tourbillons*, Carré et Naud, Paris, 1893.
- *Capillarité*, Carré et Naud, Paris, 1893.
- *Les oscillations électriques*, Carré, Paris, 1894.
- *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes*, Collection Scientia, Carré et Naud, Paris, 1894.
- *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Carré et Naud, Paris, 1895.
- *Calcul des probabilités*, Carré et Naud, Paris, 1896; 2ème éd., revue et augm. par l'auteur, Gauthier-Villars, Paris, 1912. Reprod. de la 2ème éd., J. Gabay, Paris, 1987.
- *Théorie du potentiel newtonien*, Carré et Naud, Paris, 1899.
- *Leçons sur les figures d'équilibre d'une masse fluide*, Carré et Naud, Paris, 1902.
- *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902 ; 1968.
- *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1905; 1970.
- *Leçons de mécanique céleste*, Paris, 3 vols., 1905-1910.
- *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1908.
- *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der Reinen Mathematik und mathematischen Physik*, Teubner, Leipzig, 1910.
- *Savants et écrivains*, Flammarion, Paris, 1910.
- *Les sciences et les humanités*, Fayard, Paris, 1911.
- *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Hermann, Paris, 1911.
- *Dernières pensées*, Flammarion, Paris, 1913; réed., 1963.
- *La mécanique nouvelle. Conférence, mémoire et note sur la théorie de la relativité*, Intr. de M. Édouard Guillaume, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
- *Oeuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 11 vols., 1913-1965.
- *L'analyse et la recherche*, choix de textes et introd. de G. Ramunni, Hermann, Paris, 1991.

Etudes

ACTA MATHEMATICA, 38 [1913, paru en 1921], *Henri Poincaré, In memoriam*.

APPELL, Paul, *Henri Poincaré*, Plon, Paris, 1925.

BRUNSCHVICG, Léon; HADAMARD, Jacques; LEBEUF, A. et LANGEVIN, Paul, *L'Oeuvre de Henri Poincaré*, Supplément à la *Revue de métaphysique et de morale* 21, 1913, n° 5 (septembre), 584-718

DANTZIG, Tobias, *Henri Poincaré. Critic of crisis. Reflections on his universe of discourse*, Greenwood press, New York, 1954 ; 1968.

GIEDYMIN, Jerzy. On the origin and significance of Poincaré's conventionalism, *Studies in History and Philosophy of Sciences*, 8, n° 4, 1977, 277-302.

Revue de métaphysique et de morale. Supplément : L'Oeuvre d'Henri Poincaré 21, 1913.

HEINZMANN, Gerhard. *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de*

prédicativité, Blanchard, Paris, 1985.

LEBON, Ernest. *Henri Poincaré. Biographie, bibliographie analytique des écrits*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.

MOOIJ, J.-J. A.. *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*, Gauthiers-Villars, Paris/ Nauwelaerts, Louvain, 1966.

PATY, Michel. *Einstein philosophe*, PUF, Paris, 1993.

ROUGIER, Louis. *La philosophie géométrique de Henri Poincaré*, Alcan, Paris, 1920.

SCHMID, Anne-Françoise. *Une philosophie de savant. Henri Poincaré et la logique mathématique*, Maspero, Paris, 1978.

TORETTI, Roberto. *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*, Reidel, Dordrecht, 1978.

TOULOUSE, R.. *Henri Poincaré*, Flammarion, Paris, 1910.

VOLTERRA, V. ; HADAMARD, Jacques ; LANGEVIN, Paul et BOUTROUX, Pierre 1914. *Henri Poincaré. L'oeuvre scientifique. L'oeuvre philosophique*, Alcan, Paris, 1914.

VUILLEMIN, Jules 1973. Poincaré's philosophy of space, in Suppes, P. (ed.) *Space, time and geometry*, Reidel, Dordrecht, 1973.

WHITTAKER, Sir Edmund T., 1953. *A History of the theories of aether and electricity, vol 2 : The Modern theories, 1900- 1926*, Nelson, London, 1953.

ZAHAR, Elie. Poincaré's independent discovery of the relativity principle, *Fundamenta Scientiae* 4, 1983, 147-175.

- Les fondements des mathématiques d'après Poincaré et Russell, *Fundamenta Scientiae* 8, 1987, 31-56.

Christian HOUZEL et Michel PATY

(Novembre 1994)