in Morelon, Régis & Hasnawi, Ahmad (éds.), *De Zénon d'Elée à Poincaré. Recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*, Editions Peeters, Louvain (Be), 2004, p. 391-426.

# L'élément différentiel de temps et la causalité physique dans la dynamique de Alembert

Michel PATY*

RESUME

Dans sa conception de la dynamique comme science des changements des mouvements des corps, d'Alembert se propose d'exprimer ces changements dans les seuls termes des grandeurs du mouvement. Il établit la possibilité de les concevoir ainsi physiquement, en relation à leurs causes effectives, sans recourir à des concepts externes comme les forces, en posant la co-naturalité de la cause physique et de ses effets, que traduit la notion d'accélération instantanée, dont la signification physique est liée à la forme différentielle de la grandeur temps, ainsi qu'au concept de mouvement virtuel. C'est cette construction d'une causalité temporelle physique, et l'usage corrélatif de l'analyse différentielle pour penser et mettre en rapport entre elles les grandeurs du mouvement, qui lui permettent d'énoncer en forme de *principes* les lois générales du mouvement, et de réorganiser conceptuellement la mécanique newtonienne. Dès lors, la loi fondamentale de la dynamique ne sera plus la seconde loi de Newton, mais le « principe de la dynamique » formulé pour des systèmes quelconques de corps en interaction, conséquence et synthèse des trois principes fondateurs. Ce faisant, l'impulsion d'une *mathématisation* totale de la mécanique était donnée, tout en rendant très explicite le caractère *physique* de cette science. Nous insistons, dans ce travail, sur les aspects qui touchent à la *conceptualisation physique* rendue possible par l'analyse, concernant notamment le temps, l'accélération et les grandeurs dérivées, ainsi que les particularités conceptuelles liées à leur représentation géométrique.

PLAN



* Equipe REHSEIS (UMR 7596), CNRS et Université Paris 7-Denis Diderot,
Adresse postale : Centre Javelot, 2 place Jussieu, F-75251 Paris-Cedex.
Courrier électronique : paty@paris7.jussieu.fr

# 1. INTRODUCTION. SUR LA FORMULATION PAR D'ALEMBERT DE LA « CAUSALITE DIFFERENTIELLE »

On considère généralement les travaux des premiers « continuateurs continentaux » d'Isaac Newton que furent Leonhard Euler, Alexis Clairaut et Jean Le Rond d'Alembert, comme une reprise de la physique newtonienne en « style analytique ». Mais cela n'est vrai qu'en partie. Leurs œuvres se situent, certes, à la jonction des *Principia* de Newton, et surtout du « Système du Monde » du Livre 3, et du calcul différentiel symbolique de Gottfried Wilhelm Leibniz, déjà mis en œuvre avant eux par ce dernier et ses disciples (les frères Johann et Jacob Bernoulli de Bâle, Pierre Varignon, etc.) dans des problèmes de trajectoires mécaniques de points matériels pesants ; il leur reviendrait de développer, d'approfondir et d'élargir cette approche analytique à l'ensemble des problèmes de la mécanique et de l'astronomie. Mais les projets respectifs (et les réalisations) de chacun de ces « Savants Géomètres » peuvent être considérés également comme des alternatives à la perspective newtonienne, en ce qui concerne tant les fondements de leurs conceptions de la physique et de la mécanique, que la forme et le sens donnés aux propositions de ces sciences, au choix de leurs principes, aux relations de leurs grandeurs, et donc à leurs contenus conceptuels.

C'est ainsi que la dynamique au sens de d'Alembert, telle qu'elle est exposée et mise en œuvre dans ses différents ouvrages et en premier lieu dans son *Traité de dynamique* paru en 1743[1], se présente comme une réorganisation conceptuelle et théorique de la mécanique newtonienne[2]. Les « lois ou axiomes du mouvement des corps » de Newton y sont transformés en des *principes du mouvement*, originaires ou fondateurs, tout en étant conçus comme des lois générales de la nature, qui régissent les rapports entre les grandeurs servant à décrire le mouvement. Les *mouvements* seuls y sont pris en compte, à l'exclusion de toute notion ou grandeur externe, telles que les *forces*, entendues dans le sens de « puissances », ou les *causes*, entendues comme étant des natures « métaphysiques » (et de contenu obscur). Si la loi de l'inertie est reprise inchangée, sous le nom de principe « de la force d'inertie »[3], la seconde loi de Newton, sur la proportionnalité du « changement de mouvement » à « la force imprimée » est remplacée par un « principe de la composition des mouvements »,

---

1 Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre et du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible, et démontrées d'une manière nouvelle, et ou l'on donne un principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque,* à Paris, chez David l'aîné, 1743.

2 Michel Paty, « D'Alembert, la science newtonienne et l'héritage cartésien », *Corpus* (revue de philosophie, Paris), n°38 : *D'Alembert* (éd. par Francine Markovitz et Jean-Jacques Szczeciniarz), 2001, 19-64 ; « Principes de la mécanique et analyse chez d'Alembert. Le point de vue conceptuel », à paraître ; Gérard Grimberg et Michel Paty, « L'origine hydrodynamique du principe de d'Alembert », à paraître. Voir aussi : Alain Michel et Michel Paty (éds.), *Analyse et dynamique. Etudes sur l'œuvre de d'Alembert,* Presses de l'Université Laval, Québec, 2002.

3 D'Alembert, *Traité de dynamique,* 1 ère éd., 1743, p. xii, xiv, xv, p. 3, etc. ; 2 ème éd., 1758, p. xi, xii, xv, p. 3, etc.. L'emploi de cette expression par d'Alembert est constant, dans tous ses ouvrages de mécanique et d'astronomie, aussi bien que dans *l'Essai sur les éléments de philosophie* de 1758 (p.ex., p. 381, 384, …). Il est intéressant de noter que Lagrange reprendra la même dénomination dans sa *Mécanique analytique* (1788) (voir 4 ème éd., in *Œuvres*, vol. 11, p. 239).

tandis que la troisième, celle de l'action et de la réaction, est devenue « principe de l'équilibre ». Ce n'est pas à dire que les notions de « cause » et de « force » soient absentes de la dynamique de d'Alembert, dans la mesure où il conçoit bien que c'est à elles que se rapportent les changements de mouvement, puisque ceux-ci ne peuvent provenir des corps eux-mêmes[4] : mais elles y sont exactement circonscrites, ramenées à l'attribution des effets qu'elles induisent en termes de mouvement, et « de mouvement seul ». Ou, en d'autres termes, la *causalité au sens physique*, due à l'action des forces, est considérée dans sa *co-extensivité à ses effets*.

Cette réorganisation interne d'une « science du mouvement » était rendue possible par la mise en œuvre systématique de l'analyse, non seulement pour le calcul, mais pour la *pensée* même des grandeurs et des principes du mouvement, en particulier par l'expression des variations des grandeurs en termes d'éléments différentiels. Les *grandeurs physiques* servant à décrire le mouvement et susceptibles de fournir, par leurs relations entre elles (sous forme d'équations), les lois particulières des mouvements les plus divers, y sont conçues *dans leur signification physique* à travers leur *expression mathématique*, celle de *variables continues et différentiables*. Le caractère systématique de la pensée des grandeurs de la mécanique considérées selon leur forme mathématique (géométrique et algébrique) et, plus précisément, différentielle et intégrale, n'est pas le moindre trait d'originalité caractéristique de l'ouvrage de d'Alembert. Cette pensée imprègne, sans terminologie et de façon pour ainsi dire silencieuse, les trois premiers chapitres du *Traité de dynamique*, qui posent les principes fondateurs de la science du mouvement, définissent les concepts et grandeurs propres à ce dernier, et assurent les conditions de leur mise en relation. Cette pensée peut, préparée de la sorte, s'épanouir dans le reste de l'ouvrage, où le traitement analytique des problèmes mécaniques résulte du dispositif des attendus initiaux sans nécessiter d'autre justification que la solidarité constituée entre le principe unificateur de la dynamique (le « principe de d'Alembert ») et l'expression analytique des grandeurs du mouvement.

En même temps, cette réorganisation et sa mise en œuvre assuraient le programme d'une mathématisation complète de la mécanique. D'abord, en établissant la possibilité de concevoir un tel programme, par l'exposé détaillé des principes du mouvement, de leur signification et de leurs implications, qui occupe la première partie du *Traité de dynamique.* Ensuite, par sa mise en application même à l'aide du « principe de la dynamique », dit « principe de d'Alembert », lui-même conséquence et synthèse des trois « principes fondateurs » énoncés et argumentés en premier lieu (et, à cet égard, *théorème* plus que *principe* à proprement parler), et qui permettait (en droit ou en matière de principe) de transcrire en équations tous les problèmes de mouvement des corps les plus divers que l'on puisse envisager.

---

[4] « On voit d'abord fort clairement qu'un corps ne peut se donner le mouvement à lui-même. Il ne peut donc être tiré du repos que par l'action de quelque cause étrangère. » (D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1743, Préface ; expression reprise textuellement dans la deuxième édition de 1758, et dans le chapitre 16, « Mécanique », de l'*Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Paris, 1758 ; *in Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires de d'Alembert*, vol. 2, Bastien, Paris, 1805 [suivi des*ÊEclaircissemens*] ; ré-éd., préface de Richard N. Schwab, Olms Verlag, Hildesheim, 1965 (éd. utilisée), p. 372.

Parmi les grandeurs qui décrivent le mouvement figure, en premier lieu avec l'*espace,* le *temps,* variable fondamentale en fonction de laquelle s'expriment en général les variations de toutes les autres grandeurs du mouvement, dont l'étude constitue l'objet de la *dynamique.* Le temps tient effectivement un rôle très particulier dans la réorganisation conceptuelle effectuée par d'Alembert, et c'est à tenter d'expliciter ce rôle que le présent travail est consacré. Nous verrons comment la *signification différentielle* de la *grandeur temps* lui est essentielle pour la conceptualisation précise d'une *causalité physique* qui s'exprime dans les lois du mouvement, ramenées à la forme analytique d'équations entre les grandeurs qui servent à décrire ce dernier. La forme analytique de la grandeur temporelle ($t$ et $dt$), qui résoud mathématiquement l'opposition originaire entre la singularité de l'« instantané » et la continuité du flux de la durée (opposition qui vaut pour le mouvement comme pour le temps) est, en effet, directement liée à la question de la *modalité* selon laquelle s'effectue la continuation ou le changement du mouvement pour des corps *physiques*.

D'Alembert inaugure à cet égard une pensée des phénomènes du mouvement qui est en même temps, et de manière explicite, *physique et analytique.* Avec l'*impénétrabilité* des corps, qui permet de concevoir ces derniers comme distincts de l'étendue qu'ils occupent, le *temps* est ce qui fait le caractère *physique* du mouvement, et qui distingue les déplacements effectifs des corps de ceux (purement intellectuels) des figures de la géométrie. Le problème général le plus important de la dynamique étant celui des *changements* de mouvement, l'accélération « instantanée » acquise durant l'élément différentiel de temps apparaît comme un concept générateur, qui permet d'exprimer en totalité ce que la « cause du changement » a de physique. Pour cette *construction physique* du rôle du temps dans la dynamique, la *représentation géométrique* était nécessaire à d'Alembert, qui concevait la mécanique comme une « géométrie dans le temps », et même comme une « géométrie à quatre dimensions ». Mais elle lui était également nécessaire pour assurer aux grandeurs et à leurs différentielles, par-delà leur caractère physique, un fondement rationnel, dans la veine des « premières et dernières raisons » des *Principia* de Newton, qu'il retrouvait ici, et selon une pensée opératoire explicite de la notion de limite.

Le programme de d'Alembert, avec sa manière propre de justifier la mathématisation de la mécanique, est intéressant par lui-même, dans sa cohérence rationnelle et l'effectivité de sa mise en œuvre, mais aussi en ce qu'il montre comment il était possible d'aller au-delà des *Principia* de Newton, tout en en reprenant l'héritage, en se fondant sur des conceptions différentes. Conceptions différentes, sous le double aspect de la *signification physique des grandeurs,* non identifiées *a priori* à des absolus mathématiques, et du *traitement corrélatif des problèmes par l'analyse* pour des grandeurs continues (l'analyse différentielle). Dès lors, une idée fondamentale, introduite par Newton mais sans avoir reçu une formulation précise et quantitative, celle d'*action* ou de *changement instantané,* avec l'*instantanéité du temps,* pouvait trouver son expression directe et sa signification du point de vue physique, portant ses effets dans la mise en forme des problèmes considérés.

Ce serait, plus tard, à la « causalité différentielle », et en particulier temporelle, que serait rapportée comme à son axe central toute la mécanique, et même toute la physique[5]. Il apparaît que les conceptions de d'Alembert ont réalisé un grand pas dans ce sens. Il restera ensuite à s'interroger sur la postérité effective de ce programme, tout en prenant en compte l'importance de conceptions concurrentes, comme celles d'Euler, qui donna une formulation analytique de la mécanique centrée sur la force dans le sens newtonien. C'est dans l'œuvre de Lagrange que l'on peut suivre la continuation ou la déflexion du programme conceptuel de d'Alembert : nous en proposerons quelques éléments en accompagnement du cours de cette étude.

## 2. LA DYNAMIQUE ET L'INTELLIGIBILITE DU MOUVEMENT PAR L'ANALYSE

Dans le *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, de 1751, et dans l'*Essai sur les Eléments de philosophie*, de 1758, qui sont des œuvres philosophiques, la science du mouvement des corps considérée est la Mécanique, et elle est d'emblée située parmi les « sciences mathématiques » (en fait, « physico-mathématiques »). Elle y est abordée selon l'ordre « génétique » des connaissances, où l'intelligibilité d'une science est rapportée au degré d'abstraction et de simplicité (et de généralité) de ses objets, les sciences dont les objets sont plus complexes pouvant bénéficier de l'« application » de celles dont les objets sont plus simples et de caractère plus abstrait. L'« application » d'une branche des mathématiques à une autre est justifiée par l'opération d'abstraction par la pensée de ses objets, qui les ramène à des grandeurs mathématiques propres au niveau supérieur de généralité. C'est ainsi que la géométrie, cette « science des propriétés de l'étendue », bénéficie de l'application de l'algèbre et de l'analyse (au sens du calcul infinitésimal, qui concerne les grandeurs continues), portant sur les rapports des parties de l'étendue entre elles, de telle sorte que « l'analyse algébrique (…) est la théorie des courbes »[6]. Et la mécanique, science du mouvement des corps dans l'espace avec le temps, est elle-même susceptible de l'application de la géométrie, et donc d'être traitée par les moyens de l'analyse. En effet, les grandeurs de la mécanique qui portent sur l'étendue spatiale peuvent être constituées à partir des grandeurs de la géométrie, bien qu'elles concernent le monde naturel des corps physiques. La différence de la mécanique avec la géométrie est que les grandeurs géométriques de la mécanique sont *fonction du temps* : la mécanique, écrit d'autre

---

[5] Voir Henri Poincaré, par exemple, indiquant qu'une loi, en physique, « c'est une équation différentielle » (Henri Poincaré, *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1905, chap. 7 ; 1970, p. 125).

[6] D'Alembert, *Essai sur les éléments de philosophie*, *op. cit*., chap. 15, p. 304 ; *Eclaircissements à l'Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Paris, *in* d'Alembert, *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, Zacharie Chatelain et fils, Amsterdam, 5 vols., 1759-1765 ; 1770 ; vol. 5, Paris, 1765 ; repris dans l'édition de 1965 des *Eléments de philosophie* (éd. utilisée) : Ecl. 13, « Application de l'analyse à la géométrie », p. 341-345.

part d'Alembert, est de la géométrie dans le temps[7]. Dans ses « Eclaircissements sur l'espace et le temps »[8], d'Alembert soulignera plus tard que l'*espace* et le *temps* sont conçus indépendamment des corps tout en ne pouvant l'être que par les corps (ce qui rappelle le processus d'abstraction qui les constitue comme grandeurs), et que le rattachement l'une à l'autre de ces idées si différentes s'effectue à travers le mouvement, en tant qu'elles sont des *grandeurs* (ce qui précise la spécificité de leur lien entre elles). D'Alembert indique comment le temps peut lui-même être géométrisé, par sa mise en rapport « naturelle » au mouvement uniforme ; par ailleurs, le diagramme de la variation d'espace en fonction du temps, présenté dans le *Traité de dynamique*, correspond à une sorte d'homogénéisation mathématique de ces grandeurs physiques, sans que, pour autant, leur différence de nature soit omise, si leur mise en rapport préserve leurs unités respectives[9].

Nous reviendrons plus loin sur les grandeurs analytiques de la mécanique, pour montrer comment l'analyse représente, dans le travail de d'Alembert, pour la mécanique comme pour la géométrie, davantage qu'une simple « application » d'une science plus abstraite : une manière de penser l'une et l'autre de ces sciences, *une véritable pensée de leurs grandeurs et des relations entre ces grandeurs*[10]. Nous verrons plus précisément quel rôle conceptuel joue l'analyse dans la pensée du mouvement.

On pourrait parler, jusqu'ici, d'un programme d'intelligibilité cartésien. De fait, la pensée de d'Alembert sur l'expression mathématique des grandeurs de la mécanique (voire, par extension, de la physique dans certaines de ses parties) est clairement d'inspiration cartésienne, bien plutôt que newtonienne[11]. C'est par la nature de notre connaissance que nous sommes fondés à utiliser, pour certains domaines d'objets, les mathématiques, et non parce que le monde serait lui-même par nature mathématique et de plain-pied avec les grandeurs qui le décrivent, « vraies et mathématiques », par opposition aux grandeurs « apparentes ou sensibles », selon les conceptions néo-platoniciennes de Newton. Une autre philosophie de la connaissance accompagne au XVIII ème siècle, chez les savants géomètres du continent, la nouvelle voie qu'ils reconnaissent pour la mécanique dans la suite des *Principia* de Newton, et cette philosophie est plutôt redevable de la conception cartésienne de l'intelligibilité, en ce qui concerne, en particulier, le statut

---

[7] "Il y a, écrit d'Alembert dans la préface au *Traité de dynamique*, entre la mécanique et la géométrie cette différence (…) que la géométrie ne considère dans le mouvement que l'espace parcouru, au lieu que dans la mécanique on a égard de plus au temps que le mobile emploie à parcourir cet espace". D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, 1743, Préface, p. vii.

[8] D'Alembert, *Eclaircissements aux Eléments de philosophie, op. cit.*, 1765, p. 402 et suiv.

[9] D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Préface, p. vii-viii. Le temps et l'espace sont de natures différentes, et on ne peut les comparer qu'en comparant le rapport de leurs parties. Ces considérations sont développées dans une « Remarque sur la mesure du temps », au chapitre 1 de la première partie, p. 9-12.

[10] Sa propre manière de s'exprimer sur ce point est presque explicite : voir D'Alembert, *Essai sur les éléments…, op. cit.*, chapitre XIV, « Mathématiques. Algèbre », p. 289-290.

[11] Pour autant d'Alembert ne suit aucunement le projet d'une physique cartésienne, comme cela a parfois été dit (par ex., Thomas Hankins, *Jean d'Alembert, science and the enlightenment*, Oxford University Press, Oxford, 1970), auquel, au contraire, il s'oppose : voir Michel Paty, *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert*, Thèse de doctorat en philosophie, Université de Strasbourg-2, 1977 ; sur l'« héritage » intellectuel, cartésien, newtonien et leibnizien, de d'Alembert, voir M. Paty, « D'Alembert, la science newtonienne et l'héritage cartésien », *op. cit.*

des grandeurs[12].

La mécanique est une science « mathématique » d'un genre particulier, puisque ses grandeurs, tout abstraites qu'elles soient, permettent de décrire des phénomènes du monde physique, sans que ce monde soit conçu lui-même idéalement. Elle représente, en fait, pour d'Alembert, un intermédiaire entre la rationalité des mathématiques et celle des autres sciences, et la méthode d'abstraction et d'application de connaissances plus abstraites est générale[13]. La mécanique comporte, en effet, des propositions qui ne se ramènent pas toutes, d'emblée, à la seule évidence rationnelle. Telles sont, tout d'abord, la dépendance du mouvement par rapport au temps (à cet égard, l'idée d'une « mesure naturelle du temps » suppose que le temps lui-même soit physique). Telles sont également certaines propriétés des corps qui conditionnent le mouvement et occasionnent ses changements : l'*impénétrabilité*, qui fait la distinction entre un corps et l'*étendue* qu'il occupe, et qui est l'origine de l'impulsion par chocs, ou l'*attraction*, qui est un fait général constaté mais irréductible à l'impulsion[14].

Cependant, malgré ces caractères qui en font une science du monde physique, la mécanique est, parmi ces sciences, celle qui permet de porter à son plus haut degré, c'est-à-dire à l'image des mathématiques mêmes, l'exigence de rationalité. Il est possible, en effet, comme d'Alembert le prescrit d'une manière générale, « d'y introduire et d'y appliquer, autant qu'il se peut, des connaissances puisées dans des sciences plus abstraites, et par conséquent, plus simples », et ce sont, essentiellement, pour la mécanique, la géométrie et l'analyse. Mais il est encore nécessaire « d'envisager de la manière la plus abstraite et la plus simple qu'il se puisse, l'objet particulier de cette science ; de ne rien supposer, ne rien admettre dans cet objet, que les propriétés que la science même qu'on traite y suppose ». Remplir cette exigence, c'est-à-dire rendre la mécanique plus intelligible et élargir son domaine[15], en la fondant sur des principes bien choisis et féconds, et en la mathématisant, tel est précisément le programme que d'Alembert s'était assigné dès son *Traité de dynamique.* Il s'agissait de concevoir l'objet de la mécanique de la manière la plus intelligible possible, et d'en formuler les grandeurs appropriées et les principes fondateurs. Le problème majeur rencontré dans un tel projet était d'exprimer les changements de mouvements, dûs à des causes variées, tout en se défaisant de l'obscurité attachée à des notions comme celles de *cause*, précisément, ou de *force*, qui n'est qu'une transcription de la première.

---

[12] Voir M. Paty, « D'Alembert, la science newtonienne et l'héritage cartésien », *op.cit.*, 19-64 ; « La notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique », *in* Espinoza, Miguel (éd.), *De la science à la philosophie. Hommage à Jean Largeault,* L'Harmattan, Paris, 2001, p. 247-286.

[13] D'Alembert l'écrit ainsi : « …sur la clarté et l'utilité des notions abstraites,…pour traiter suivant la meilleure méthode possible quelque partie des mathématiques que ce soit (nous pourrions même dire quelque science que ce puisse être)… » (*Essai sur les éléments de philosophie, op. cit.*, chap. 16, p. 367).

[14] Impénétrabilité et attraction sont deux concepts newtoniens, d'importance fondamentale chez d'Alembert, qui impliquent un rupture évidente avec la physique cartésienne.

[15] Cet élargissement, auquel il aura lui-même grandement contribué durant les quinze années qui séparent le *Traité* scientifique de 1743 de l'*Essai* philosophique de 1758, lui permet d'inclure l'astronomie et la physique des fluides (hydrostatique et hydrodynamique), à la suite de la mécanique, comme autant de chapitres (respectivement, chap. 17 et 19) de l'*Essai sur les éléments de philosophie*.

« J'ai détourné la vue de dessus les causes motrices », indique d'Alembert dans la préface du *Traité de dynamique*, en annonçant son projet de s'en tenir à la considération du mouvement seul (et donc de ses grandeurs, formées à partir de l'espace, et fonctions du temps, géométriques et analytiques), et de rejeter le recours à des forces qui seraient extérieures au mouvement, « êtres obscurs et métaphysiques », inutiles pour la connaissance. Selon ce programme, les seules notions de force acceptables pour la mécanique seraient celles de forces dérivées des grandeurs qui décrivent le mouvement : les *forces accélératrices* et *motrices*, définies respectivement comme l'accélération et comme la masse multipliée par l'accélération. D'Alembert définissait la *dynamique* (terme repris de Leibniz), comme la « science du mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque »[16], c'est-à-dire non plus comme la science des forces ou des puissances, mais comme la science de la manifestation des *effets* de ces forces, conçus de la manière la plus générale. La dynamique faisait ainsi l'objet d'une reconfiguration de sens, en se délestant de toute charge « métaphysique », mais en même temps de tout contenu conceptuel qui voudrait échapper à la prise de la représentation par l'analyse.

En parlant de l'action mutuelle des corps « d'une manière quelconque », d'Alembert avait en vue, d'une part, la diversité des modes de cette action, qui pouvait être aussi bien l'impulsion par contact que l'attraction à distance ; et, d'autre part, les modalités des répercussions de cette action, pour des corps liés entre eux, de configurations complexes (comme, par exemple, le pendule composé).

Son propos, qui imprègne tout le *Traité de dynamique* et qui détermine la structure de l'ouvrage, était de traiter du mouvement en s'en tenant à la considération des seules variables de celui-ci, à savoir les espaces parcourus, les temps mis à les parcourir, les vitesses, les accélérations et toute autre fonction formée sur les premières, sans recourir en aucune façon aux « forces », c'est-à-dire sans essayer d'entrer dans les *causes* qui font les changements de mouvement. Ce n'est pas que d'Alembert ignorât ces causes, puisqu'il y a des changements de mouvement dans la nature, que le propos de la dynamique est, précisément, de décrire, en en donnant la loi : il voulait circonscrire la description des changements (dûs à des causes) à ce qui peut en être dit, c'est-à-dire à la constatation de leurs effets en termes des changements dans les grandeurs qui décrivent le mouvement. Ces effets se marquent dans les lois particulières du mouvement, locales et instantanées, c'est-à-dire dans l'équation différentielle qui détermine la trajectoire[17].

---

[16] D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, Préface, p. xvi, xxiii. Il écrit aussi, comme on l'a vu plus haut, que l'objet de la dynamique est l'étude des mouvements variés. Notons que Lagrange, qui gardait le concept de force (mais en le dotant d'une expression analytique), donne, dans la *Mécanique analytique*, une définition de la dynamique qui n'est pas très différente dans son intention, ou du moins dans son vocabulaire, de celle de d'Alembert : « La Dynamique est la science des *forces accélératrices ou retardatrices* et des mouvements variés qu'elles doivent produire ». Il en rapporte les premiers fondements à Galilée (Joseph Louis Lagrange, *Mécanique analytique*, 1788, 4è éd., in Lagrange, *Œuvres*, vol. 11, p. 237. Souligné par moi, M.P.).

[17] D'Alembert ne récusait toutefois pas absolument l'emploi de ces termes (voir la Préface au *Traité de dynamique*, op. cit., 1743, p. xxv). Il parle fréquemment de « puissances » pour indiquer des forces ; mais il ramènerait toujours leur expression, dans le traitement de problèmes de mécanique, à celle de leurs effets sur le mouvement, ou à leur annulation dans une situation d'équilibre. Voir, p. ex., *Traité de dynamique*, 1 ère éd., 1743, *op. cit.*, Deuxième partie, chapitre

Cet aspect de la causalité, qui revient à l'écriture d'une équation différentielle, est en quelque sorte la *causalité au sens purement physique* telle que l'entend d'Alembert : bien qu'il n'emploie pas expressément le terme, d'usage postérieur, on doit constater que l'idée d'une telle *causalité physique* est effective dans sa pensée. En quelque sorte, la *cause physique est connue par ses effets*, *qui lui sont simultanés*, dans l'instant même où ils se marquent (nous allons voir les conséquences conceptuelles considérables de cette postulation), et cette connaissance épuise tout ce que la causalité comporte qui nous soit accessible et concevable : c'est donc le seul aspect de la causalité qu'il y ait lieu de prendre en compte, tout autre se perdant dans des obscurités « métaphysiques »[18]. La *causalité physique*, à la différence de la *causalité métaphysique*, nous est connaissable en ce qu'elle exprime l'*identité effective* (que nous pourrions dire *pratique*, ou encore *phénoménale*) de la cause avec son effet, dès l'instant même du début de son application. De là l'importance de prendre en compte *l'effectivité*, dans la durée du temps (et dans la durée immédiate attachée à l'instant), *de cette cause*, comme nous allons le voir de manière plus précise.

C'est pourquoi, dans la pensée de la mécanique de d'Alembert, étant donné son projet, le mouvement est considéré et traité *en lui-même*, de façon pour ainsi dire *interne*, par l'utilisation des seules grandeurs *cinématiques*, exprimées mathématiquement (par la géométrie et l'analyse), et donc de façon totalement mathématisée. Du moins lui faudra-t-il, pour cela, être en mesure d'exprimer ces grandeurs et leurs relations. Les premières, en tant que grandeurs continues, sont pensées à travers leur expression donnée par le calcul différentiel. Les secondes, les relations des grandeurs, requièrent la connaissance des principes physiques ou lois générales du domaine considéré.

Ce que nous venons de dire ne signifie nullement, bien entendu, que la mécanique de d'Alembert se réduirait à une *cinématique*, par opposition au sens usuel de *dynamique* : elle est bel et bien une *dynamique*, en ceci que les mouvements sont soumis à des *changements*, qui sont *assignables*, par les effets constatés. Elle tient donc aux propriétés qui sont à l'origine de ces changements, à savoir que les corps sont impénétrables, ont une masse et possèdent la capacité d'attraction, c'est-à-dire ce qui fait leur caractère *physique* : « Comment arrive-t-il que le Mouvement d'un Corps suive telle ou telle loi particulière ? c'est sur quoi la Géométrie seule ne peut rien nous apprendre, et c'est aussi ce qu'on peut regarder

---

2, définition 2, p. 53 : « Lorsque plusieurs puissances agissent ensemble, j'appellerai *force résultante du concours d'action de ces puissances*, ou simplement *force résultante de ces puissances*, une puissance égale et directement opposée à celle qui serait capable de leur faire équilibre ». (Souligné par d'Alembert).

[18] En fait, de la « fausse métaphysique », celle issue de la scolastique, car il y a, chez d'Alembert, comme chez bien d'autres auteurs du XVIII è siècle (y compris Emmanuel Kant), un sens positif de la métaphysique, qui correspond à peu près à ce que nous appelons aujourd'hui « épistémologie ». Voir Ernst Cassirer, *La philosophie des Lumières* (original alld., 1932), trad. fr. par Pierre Quillet, Fayard, Paris, 1966 ; Georges Gusdorf, *Les principes de la pensée au siècle des Lumières*, Payot, Paris, 1971 (*Les sciences humaines et la pensée occidentale*, 4) ; M. Paty, *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert*, *op. cit*, 1977, et « Philosophie et physique », *Encyclopédie philosophique universelle*, vol. 4 : *Le Discours philosophique*, chapitre 123, Presses Universitaires de France, Paris, 1998, p. 2104-2122. Sur Descartes et Leibniz, voir Michel Fichant, *Science et métaphysique dans Descartes et dans Leibniz*, Presses Universitaires de France, Paris, 1998.

comme le premier Problème qui appartienne immédiatement à la Méchanique. »[19]

Il nous faut préciser comment l'« application » de l'analyse à la mécanique correspond en fait, dans l'élaboration de d'Alembert, à une « pensée différentielle » des grandeurs de cette science, avant d'en aborder les implications du point de vue de la connaissance des phénomènes physiques. D'une manière générale, pour d'Alembert, un élément différentiel ($dA$) est conçu de manière homogène à la grandeur ($A$) qui l'engendre, avec laquelle il peut se composer, s'ajoutant à elle ou s'en retranchant, en grandeur et direction, suivant les trois dimensions spatiales (c'est-à-dire, en fait, vectoriellement[20]). Et cependant il n'a, en toute rigueur, qu'une signification symbolique, puisqu'il ne peut ni être un nombre fini, ni être nul. Il est, en fait, défini par la dérivée de la grandeur par rapport à la variable : $dA = A'(x)\, dx$, seule la dérivée $A'(x)$ étant une quantité finie, limite du rapport de la différence ($\Delta A$) entre les valeurs de la grandeur $A$ à la différence ($\Delta x$) des valeurs correspondantes de la variable $x$, quand ces différences tendent vers zéro ($\frac{\Delta A}{\Delta x} \rightarrow \frac{dA}{dx} = A'$). La signification d'un élément différentiel lui est donnée non par l'octroi d'une valeur numérique, mais par une *opération* de passage à la limite. Tout se passe comme si l'on pouvait penser l'élément différentiel comme un nombre, sans qu'il ait la valeur d'un nombre, et sans pour autant être tributaire de notions vagues comme celle d'infini ou d'infinitésimale. Il existe d'ailleurs d'autres exemples, avec lesquels on était familiarisé à l'époque de d'Alembert, de grandeurs définies par d'autres opérations de passage à la limite, et parmi les nombres eux-mêmes : les « rapports incommensurables » (les nombres irrationnels), irréductibles à des nombres exacts et qui ne peuvent être conçus que par l'opération d'une suite infinie de rapports de nombres rationnels et de son passage à la limite, et qui, pour le reste, obéissent aux mêmes propriétés que les nombres ordinaires, entiers ou fractionnaires (« rompus »)[21].

Pour d'Alembert, la notion de passage à la limite, qui implique l'idée de l'infini, évite en fait l'idée de l'infini au sens actuel, parce qu'elle conduit à des termes finis. Elle est sous-tendue par une représentation géométrique : cela vaut pour les rapports incommensurables (ou nombres irrationnels), qui sont *finis géométriquement*, par exemple la diagonale d'un carré, aussi bien que pour les dérivées (limites finies du rapport de deux quantités infinitésimales). D'Alembert a

---

19 D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère éd., 1743, Préface, p. viii. Sur la justification, par d'Alembert, de l'emploi du terme « dynamique », malgré l'obscurité de sa signification originelle, voir *ibid.*, p. xxiii.

20 Bien que le concept de vecteur n'existe pas encore, d'Alembert écrit, dans ses traités scientifiques de géométrie, de mécanique ou d'astronomie, des grandeurs géométriques telles qu'une distance, ou une vitesse, etc., sous la forme synthétique d'un unique symbole pour désigner ensemble ses trois composantes, et pratique ainsi, avant la lettre, l'addition vectorielle ; et de même pour les éléments différentiels : $a$, $da$. ; par exemple : $a + b$ ; $a + da$… Les notations particulières utilisées dans ce paragraphe du texte sont de nous, non de d'Alembert (sauf, bien sûr, le symbole $d$, dû à Leibniz, qui marque les éléments différentiels).

21 Voir les analyses sur les nombres irrationnels comme limites de suites infinies, ainsi que sur la définition de l'élément différentiel par la dérivée, données par d'Alembert dans les *Eclaircissements aux Eléments de philosophie* (1765), respectivement : Ecl. 12, « Eclaircissement sur les éléments de géométrie », en part. p. 337-340, et Ecl. 14 : « Eclaircissement sur les principes métaphysiques du calcul différentiel », en particulier p. 350-352, ou encore les articles « Différentiel » et « Fluxions » de l'*Encyclopédie*.

donc, quant à lui, repris la forme leibnizienne de la grandeur différentielle, d'utilisation immédiate, maniable et féconde dans les calculs, en lui donnant le contenu et la justification de la fluxion newtonienne[22] ou, plus exactement, de la géométrie des limites, développée par Newton dans le livre I des *Principia*, en vue précisément des problèmes de la mécanique. C'est ce qu'il expose très clairement, par exemple à l'article « Différentiel » de l'*Encyclopédie* : « Il [Newton] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premières et dernières raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports ». D'Alembert touche ici particulièrement juste, car Newton a utilisé, précisément, dans les *Principia*, non son calcul des fluxions proprement dit, tel qu'il l'avait élaboré, où interviennent des « moments » infinitésimaux qui posent des problèmes d'intelligibilité, mais la « méthode des premières et dernières raisons des grandeurs », qui est une géométrie des limites équivalente au calcul des fluxions, mais mieux fondée que celui-ci, précisément par son recours à la notion de limite[23]. Pour d'Alembert, l'utilisation des différentielles est dès lors parfaitement justifiée avec cette signification, que l'on parvient à comprendre aisément par la familiarisation avec le calcul[24].

Il pouvait donc utiliser de manière formelle cet élément comme s'il s'agissait d'une grandeur de même nature que la grandeur génératrice. Cette pensée opératoire dépasse, en fait, la forme pour atteindre le contenu : l'élément différentiel est pensé selon un contenu homogène à celui de la grandeur dont il est la différence : $dA$ est une grandeur (moyennant le rappel de sa définition par la limite, qui interdit d'y voir une quantité finie) au même titre que $A$, et peut être composée avec elle. La particularité des grandeurs de la mécanique, qui servent à décrire les mouvements, c'est-à-dire des déplacements dans l'étendue spatiale avec le temps, est que leurs dérivées y sont obtenues en opérant par rapport au temps pris comme variable, ce qui octroie une signification précise aux éléments différentiels des

---

22 Voir, pour plus de détails, M. Paty, *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert*, 1977, *op. cit*., p. 205-215 ; et « Principes de la mécanique et analyse chez d'Alembert.… », *op. cit*.

23 On peut suivre, dans l'évolution des manuscrits de Newton sur les fluxions, parallèle à ses écrits sur le mouvement (jusqu'au *De Motu* et aux *Principia*), son cheminement vers un fondement satisfaisant de ce calcul, obtenu avec la notion de limite, qui coïncide avec celle de sa « méthode des premières et dernières raisons » : I. Newton, *Tractatus de methodis serierum infinitarum et fluxionem* (rédigé pdt l'hiver 1670-1671, publié en latin en 1779) ; trad. angl., *A treatise of the methods of series and fluxions*, publiée par John Colson, en 1736 ; également *in* I. Newton, *The mathematical papers of sir I.N.*, éd. par Derek T. Whiteside, Cambridge University Press, Cambridge, 8 vols., 1967-1981 (vol. 3, 1969, p. 32-353) ; trad. fr. par Georges Louis Leclerc de Buffon, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, 1740, ré-impr., Blanchard, Paris, 1966 ; I. Newton, *De Motu* (1er rédact. : automne 1684), *in* I. N., *The mathematical papers*, vol. 6, p. 30-455 ; Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 16877 ; 2 ème éd., 1713 ; 3 ème éd. avec les variantes, par Alexandre Koyré et I. B. Cohen, Cambridge University Press, Cambridge, 1972 ; *Mathematical principles of natural philosophy*, trad. angl. (d'après la 3è éd.) par Andrew Motte (1729), rev. and ed. by Florian Cajori, University of California Press, Berkeley, 1934 ; ré-impr., 1962, 2 vols. Voir Kenneth Simonsen, *Genèse de la mécanique de Newton : mathématisation et conceptualisation. Comparaison avec la dynamique de Leibniz*, Thèse de doctorat, Université Paris 7-D. Diderot, 2003.

24 D'Alembert, article « Différentiel », *in* Jean le Rond d'Alembert et Denis Diderot (dirs.), *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, 17 vols + 11 vol. de planches, Briasson, David, Le Breton et Durant, Paris, 1751-1780 (ci-après : *Encyclopédie*) : vol. 4, 1754 (p. 985-989), p. 989, 985.

diverses grandeurs : si *e(t)* est une longueur parcourue, considérée au temps *t*, *de* en est l'élément différentiel défini par la vitesse instantanée *v(t)* : $de = v(t)dt$ ; *de* est homogène à *e*, et la différentielle seconde, $d^2e$, l'est aussi, définie quant à elle par l'accélération instantanée ($\frac{d^2e}{dt^2}$). Cet usage, proposé par d'Alembert, est d'application immédiate en mécanique et lui permet d'exprimer, sans recourir aux causes ni aux forces, le problème général de la dynamique, qui est celui des changements de mouvement.

Cette pensée différentielle des grandeurs physiques correspond à une transformation décisive dans la conception de la mécanique, et plus généralement de la physique, comme science : elle détermine le mouvement irréversible de leur mathématisation, qui s'effectuerait, comme d'Alembert l'avait bien vu, sous la législation de principes physiques propres à chaque domaine. Quant à la raison de cette mathématisation, elle serait justement donnée, dans chaque cas, par le choix des principes physiques adéquats, formulés rationnellement, qui entraîne, par voie de conséquence, les relations (ou rapports) entre les grandeurs considérées, tirées de leur expression mathématique. Cette conception rationnelle des grandeurs et des principes d'une science physique est proche, et sans aucun doute tributaire, des considérations exposées par Descartes dans les *Règles pour la direction de l'esprit* (sans les restrictions ultérieures qu'y apporta sa conception purement géométrique de la physique, exposée notamment dans les *Principes de la philosophie*)[25].

## 3. CRITIQUE DE LA SECONDE LOI DE NEWTON ET CONSTRUCTION DES GRANDEURS DU MOUVEMENT

Dans la dynamique de d'Alembert, la loi fondamentale de la dynamique ne pouvait plus être la seconde loi de Newton, qui énonce la proportionnalité entre le changement de mouvement et la « force motrice imprimée »[26]. Les trois lois de Newton y sont remplacées, nous l'avons dit, par trois *principes du mouvement*, principes originaires ou fondateurs, d'où toute notion externe comme celle de cause ou de force est exclue. La deuxième loi de Newton, qui peut se lire $F = \Delta(mv) = m\Delta v$, comportait une ambiguïté dimensionnelle, que l'on peut rattacher à la difficulté pour Newton de concevoir un « moment de temps ». Elle ne reçut son expression différentielle, sous laquelle elle devait rester ($F = m\frac{d^2x}{dt^2}$),

[25] René Descartes, *Regulæ ad directionem ingenii* (vers 1728), in AT, vol. 10, p. 349-48 ; trad. en fr., *Règles pour la direction de l'esprit*, Paris, Vrin, 1970 ; *Principia philosophiæ* (1644), in AT, vol. 8, p. 1-353, et trad. en français (1647), *Principes de la philosophie*, in AT, vol. 9, p. 1-362. (AT : *Oeuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, 11 volumes, 1ère éd., 1896-1913 ; nouvelle édition révisée, 1964-1974 ; ré-éd., 1996). Voir M. Paty, « La notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique », *in* Miguel Espinoza (éd.), *De la science à la philosophie. Hommage à Jean Largeault*, L'Harmattan, Paris, 2001, p. 247-286.

[26] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica. Mathematical principles of natural philosophy*, *op. cit.* ; vol. 1 (Livre 1), Axiomes ou lois du mouvement, loi 2 : « Le changement de mouvement est proportionnel à la force morice imprimée ; et il se fait dans la direction de la ligne droite le long de laquelle cette force est imprimée » (« The change of motion is proportional to the motive force impressed ; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed »).

qu'en 1750, dans un travail d'Euler[27]. Cette formule a la signification d'une équation entre deux termes qui sont définis de manière indépendante : d'un côté, $F$ représente la force imprimée au corps, extérieure à lui ; de l'autre, $m$ est la masse de ce corps et $\frac{d^2x}{dt^2}$ l'accélération prise par ce dernier à l'instant considéré $t$ [28].

D'Alembert fait, lui aussi, figurer l'accélération dans une formule qui rend compte du changement de mouvement, déjà dans les premières pages du *Traité de dynamique*, quand il évoque, à propos du mouvement uniforme, le mouvement varié, mais c'est dans un sens fort différent. Il construit pas à pas la relation qui permet de passer du mouvement uniforme au mouvement accéléré ou retardé, en s'appuyant sur la représentation graphique à deux dimensions des espaces et des temps, dont l'un des axes (l'axe vertical) figure un mouvement uniforme de référence qui correspond aux temps, $t$, l'autre axe (horizontal) figurant les espaces parcourus correspondants, $e$ étant la variable de position. Un mouvement uniforme donné correspond à une droite oblique par rapport au premier axe ; un mouvement non uniforme, ou varié, se marque par un rapport non linéaire des espaces et des temps ; la représentation en est donc une courbe, $e = e\,(t)$, convexe ou concave, suivant que le mouvement est accéléré ou retardé. C'est par l'étude de cette courbe que d'Alembert définit les grandeurs caractérisant un mouvement varié, à savoir la vitesse, l'accélération, et les autres grandeurs dérivées. Dans une telle étude, il n'est pas nécessaire de s'étendre sur la cause de la variation du mouvement : il suffit de savoir que « cette variation continuelle ne peut provenir que de quelque cause étrangère qui agit sans cesse… ».

La définition de la *vitesse instantanée* à l'instant $t$ telle que la propose d'Alembert fait intervenir à la fois et *l'élément différentiel* de la variable d'espace, $de$, conçu pour une unité de temps, cette dernière étant égalée à $dt$ (nous reviendrons plus loin sur les problèmes conceptuels posés par l'élément différentiel

---

[27] Euler donne la formule à un facteur 2 près : $2Mddx = \pm Pdt^2$, en indiquant : « C'est cette formule seule qui renferme tous les principes de la mécanique ». Cf. Leonhard Euler, « Découverte d'un nouveau principe de méchanique », *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 6 (1750), 1752, p. 185-217 ; repris dans L. E., *Opera Omnia*, series 2 : *Opera mechanica et astronomica*, vol. 5, éd. par Joachim Otto Fleckenstein, Lausanne, 1957, p. 81-109.). L'expression de la vitesse comme $\frac{dx}{dt}$, et de l'accélération comme $\frac{ddx}{dt^2}$, avait été donnée par Pierre Varignon (dans des Mémoires à l'Académie des sciences de Paris, pour les années 1698 et 1700) et était utilisée depuis lors par les Géomètres analystes. Sur la définition par Varignon de la « vitesse dans chaque instant », voir : Pierre Varignon, *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits* (Posthume), Paris, 1725 ; Michel Blay, *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIè et XVIIIè siècles*, Presses Universitaires de France, Paris, 1992, p. 152-221. Euler avait formulé de manière systématique la mécanique du point matériel à l'aide de différentielles dans son ouvrage de 1735, *Mechanica sive motus scientia analyticae exposita*, 1735 ; ré-éd. par Paul Stäckel, *in* L. Euler, *Opera omnia* : série 2, *Opera mechanica et astronomica*, vol. 1, Basel, 1912. Colin Mac Laurin avait donné la formule de l'accélération sous la forme fluxionnelle dans son *Traité des fluxions*, *A Treatise of Fluxions*, London, 1742. Voir H.J.M., Bos, « Mathematics and Rational Mechanics », in *The Ferment of Knowledge. Studies in the Historiography of Eighteen Century Science*, Cambridge University Press, 1980.

[28] Nous laisserons ici de côté le problème, soulevé vers la fin du XIX ème siècle par Ernst Mach, Heinrich Hertz et Henri Poincaré du caractère circulaire de cette relation en ce qui concerne les définitions respectives de la force, de la masse et de l'accélération : voir M. Paty, « Principes de la mécanique et analyse chez d'Alembert.… », *op. cit*. La conception (ci-dessous) de d'Alembert échappe à cette critique.

de temps, *dt*), et supposée ici constante avec le temps ; et la notion de *vitesse virtuelle,* ou tendancielle, bien que celle-ci ne soit pas mentionnée nommément à cet endroit (nous y reviendrons aussi). En effet, si la vitesse change à chaque instant, indique-t-il, « on conçoit seulement que son expression *pour un instant donné* doit être la même qu'elle serait, si dans cet instant le mouvement cessait d'être accéléré ou retardé ». La signification de la vitesse instantanée est donc d'être une vitesse uniforme pendant l'élément de durée *dt,* avec la valeur et la direction que le mouvement avait jusqu'à cet instant : elle est prise sur la tangente à la courbe du diagramme ($e = e(t)$) : la vitesse est définie comme $u=\frac{de}{dt}$ [29].

De même d'Alembert *construit l'accélération* (en faisant abstraction de la vitesse), en considérant le mouvement (virtuel ou tendanciel), qui est l'effet de la cause du changement de mouvement, et les espaces parcourus correspondants : ceux-ci « seraient ceux que la *cause accélératrice* ferait parcourir au corps dans les instants [considérés] si au commencement de ces instants il n'y avait aucune vitesse »[30]. Dans son raisonnement, d'Alembert évalue des rapports d'espaces parcourus en excès ou en défaut par rapport au mouvement uniforme (par la distance sur l'axe des espaces parcourus, pour le point courant au temps *t,* entre la courbe et la tangente). L'approximation au point considéré de la courbe par le cercle tangent lui fournit la relation de proportionnalité entre l'élément différentiel du second ordre d'espace (*dde*) et le carré de l'élément de temps ($dt^2$) [31]. Notons ici que sa construction, effectuée sur un diagramme général des espaces et des temps, vaut pour tout mouvement varié.

En fin de compte, « les espaces parcourus par un corps en vertu d'une puissance accélératrice quelconque sont au commencement du mouvement comme les carrés des temps », et l'« équation différentio-différentielle » (c'est-à-dire l'équation différentielle du second ordre) de la courbe s'écrit $\varphi dt^2 = \pm dde$, où $\varphi$ exprime « une fonction quelconque de *e* et de *t,* ou même de ces grandeurs et de leurs différences »[32]. Cette équation différentielle de la courbe permet de *définir* l'accélération, la force accélératrice et la force motrice. D'Alembert en formule les définitions dans les termes suivants : « Ainsi nous entendrons en général par la force motrice le produit de la masse qui se meut par l'élément de sa vitesse, ou ce

---

29 D'Alembert, *Traité de dynamique,* 1ère éd, 1743, 1 ère partie, chap. 1, art. 14, p. 13-14. (Souligné par moi, M.P.).

30 D'Alembert, *Traité de dynamique,* 1ère éd., 1743, 1 ère partie, chap. 1, art. 15 et 16, p. 14-16. (Souligné par d'Alembert). Cette construction des grandeurs du mouvement est très rigoureuse du point de vue conceptuel, en particulier par les considérations sur les rapports d'unités et sur les limites. Elle est, à cet égard, sans commune mesure avec les constructions algorithmiques de Pierre Varignon, qui ont néanmoins contribué sans aucun doute à l'inspirer, en posant les formules de la vitesse et de l'accélération en termes de différentielles (voir la note *supra*).

31 D'Alembert, *Traité de dynamique,* 1ère éd., 1743, 1 ère partie, chap. 1, art. 15, p. 14-15. Déjà, fait remarquer Lagrange, Huygens avait égalé à des arcs de cercle chaque partie infiniment petite d'une courbe quelconque (Lagrange, *Mécanique analytique, in* Lagrange, *Œuvres,* vol. 11, p. 246-254). Il s'agit ici, avec d'Alembert, non d'une trajectoire, mais d'une courbe dans un diagramme d'espace-temps.

32 D'Alembert, *Traité de dynamique,* 1ère éd., 1743, 1 ère partie, chap. 1, art. 17, p. 16. La notation *dde* est équivalente à $d^2e$ (qu'il devait utiliser aussi). Cette équation permet de déterminer le caractère accéléré du mouvement (avec le signe +, la courbe étant convexe) ou retardé (avec le signe -, la courbe étant concave). On peut aussi écrire l'équation (art. 18, *ibid.*) comme : $\varphi\, de = \pm\, udu$.

qui est la même chose par le petit espace qu'elle *parcourrait* dans un instant donné en vertu de la cause qui accélère ou retarde son mouvement ; par force accélératrice, nous entendrons simplement l'élément de la vitesse »[33]. Au total, les définitions des grandeurs (instantanées) du mouvement sont : la vitesse, $u=\frac{de}{dt}$ ; la force accélératrice (ou l'accélération), comme « élément de vitesse », $\varphi = \frac{du}{dt} = \frac{dde}{dt^2} \equiv \frac{d^2e}{dt^2}$ ; la force motrice, $m\varphi = m\frac{du}{dt} = m\frac{dde}{dt^2} \equiv m\frac{d^2e}{dt^2}$.

Ces relations sont donc de définition (de la force accélératrice et de la force motrice), et sont toujours données, même quand la cause du changement de mouvement est inconnue. Elles n'ont aucunement la signification euléro-newtonienne d'une équation qui égale le changement interne du mouvement à une force externe appliquée ; ou, dans les termes de d'Alembert, critiquant les conceptions de Daniel Bernoulli et d'Euler, d'une équation qui correspondrait à un principe de proportionnalité entre la cause et de l'effet[34]. Leur signification reste interne au mouvement, dont elles ne font qu'exprimer le changement subi. En donnant ces définitions, d'Alembert se situe dans la perspective d'une *continuité* du changement de mouvement par rapport à l'état de mouvement uniforme rectiligne. Remarquons que la relativité du mouvement est implicite dans la considération des accélérations, dans la construction même (l'accélération n'est pas affectée par l'omission du mouvement uniforme au point de tangence de la courbe), et qu'elle provient de la relativité de l'espace. Toutefois, d'Alembert ne la relève pas à cet endroit.

L'action de la cause se marque donc, pour d'Alembert (et c'est cela seul qui importe), par les effets qui en résultent, en termes des grandeurs variables du mouvement (positions, vitesses, accélérations, forces accélératrices et motrices, etc.). Et l'identification par définition de la force à la grandeur cinématique ne fait, en vérité, qu'exprimer l'identification de la force à son effet au moment même où elle s'applique.

En procédant à des définitions, tirées d'un diagramme des espaces et des temps qui correspond à une spatialisation du temps et à une géométrisation conjointe de ces deux grandeurs, d'Alembert ne faisait que formuler les premières conséquences de son programme pour une dynamique qui ne considère « que le mouvement et le mouvement seul ». Le *principe d'inertie*, considéré d'abord, posait le mouvement comme naturellement uniforme, ce qui permettait de géométriser le temps, et de définir les mouvements variés en considérant les déviations par rapport à l'uniformité : construisant les *grandeurs géométriques du mouvement*, uniforme aussi bien que varié, en faisant appel à *la pensée différentielle* de ces grandeurs. D'Alembert possédait dès lors les moyens de penser le mouvement et ses variations en termes de principes originaires du mouvement, ajoutant au principe d'inertie le principe de la composition du mouvement et celui de l'équilibre. En particulier, la loi de composition des vitesses a pour corollaire

---

33 D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère éd, 1743, 1 ère partie, chap. 1, art. 14, p. 19. (Souligné par moi, M.P., pour signaler le caractère virtuel ou tendanciel des éléments différentiels des grandeurs considérées).

34 D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère éd., 1743, 1 ère partie, chap. 1, art. 19 (« Sur les forces accélératrices »), p. 18-20. « …Pour nous, nous ne prendrons jamais le rapport de deux forces que comme celui de leurs effets, sans examiner si l'effet est réellement comme sa cause » (p. 19).

l'utilisation des accélérations : dans le changement de mouvement qui survient à un instant donné *t*, les vitesses précédemment acquises (en vertu du premier principe, de l'inertie) se composent (géométriquement) avec les « éléments » (c'est-à-dire les différentielles) des vitesses reçues : on est en droit d'écrire directement une vitesse après sa variation (augmentation ou diminution), comme $v \pm dv$, pris en grandeur et direction. De même, le principe de l'équilibre se conçoit comme l'annulation de la vitesse totale des constituants de ce système (ou plus exactement, de sa quantité de mouvement), et permet de donner corps à la notion de vitesse virtuelle, qui peut être comprise comme une certaine tendance, contrariée, au mouvement, et dont l'élément différentiel de vitesse constitue une représentation « intuitive » qui semble bien sous-tendre les considérations effectives de d'Alembert [35].

C'est donc bien la pensée « analytique » (c'est-à-dire selon des concepts exprimés par des grandeurs différentiables) qui a permis à d'Alembert de reprendre l'idée des trois « lois du mouvement » de Newton en modifiant sensiblement leur formulation, et de réorganiser sur cette base la pensée de la mécanique[36]. Tel est le sens de la structuration du *Traité de dynamique*, qui énonce tout d'abord trois *principes originaires* du mouvement : « On peut réduire tous les Principes de la Mécanique à trois, la force d'inertie, le mouvement composé, et l'équilibre »[37]. Appliqués à un système de corps en interactions quelconques, ces principes pris ensemble permettent d'en déduire le théorème ou « principe général de la dynamique » (« principe de d'Alembert »). Ce dernier rapporte l'état de mouvement du système à un état d'équilibre, en prenant en compte les vitesses et éléments de vitesse de tous les ordres des diverses parties du système (vitesses acquises, vitesses virtuelles dues aux liaisons du système, vitesses prises finalement dans le mouvement résultant effectif, ce qui peut s'écrire : $v_a + v_l - v_{eff} = 0$). Ce sont, en fait, les impulsions ou « quantités de mouvement » (produits des masses par les vitesses pour les différents corps) qui sont prises en compte. On peut obtenir ainsi l'équation (différentielle) du mouvement par celle de l'équilibre, sans qu'il ait été aucunement fait appel à un concept de force extérieure.

Du moins, est-ce là l'idée dont tout l'ouvrage se veut l'illustration, voire la démonstration : « j'espère faire voir par ce Traité », précise en effet d'Alembert, « que toute cette science peut être déduite de ces trois principes ». Son « principe général de la dynamique » y occupe un rôle stratégique, étant directement déduit des trois principes fondateurs (en fait, des second et troisième), dont il constitue une sorte d'expression synthétique ; avec cet avantage d'être immédiatement applicable à tout système de corps solides, libres ou liés, bien au-delà des seuls systèmes simples de points matériels, et donc de portée très vaste, y compris concernant les corps célestes liés entre eux par l'attraction universelle

---

[35] Les termes « intuition », ou « contenu intuitif » sont de moi, non de d'Alembert, qui ne s'exprimait évidemment pas de cette façon.

[36] Voir, pour plus de détails sur ce point, M. Paty, *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert*, *op. cit*. ; et « Principes de la mécanique et analyse chez d'Alembert. Le point de vue conceptuel », à paraître.

[37] D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère éd de 1743, p. 3 ; voir aussi *ibid.*, Préface, p. xiv. Sur le sens des principes de la mécanique, voir M. Paty, *Théorie et pratique…*, op. cit., chap. 6, p. 301-312.

newtonienne[38]. Le principe était en outre extensible, sous certaines conditions, au cas des fluides et des milieux continus, comme l'établiraient les ouvrages ultérieurs de d'Alembert sur ces questions, notamment avec le calcul aux dérivées partielles[39].

## 4. LE TEMPS COMME VARIABLE ET SA DIFFERENTIELLE

En mettant en avant dans la constitution de sa dynamique le rôle central du temps comme grandeur, d'Alembert s'inscrivait dans une veine ouverte par Galilée avec la formulation de la loi de la chute des corps, où les espaces parcourus (conçus comme des distances finies) sont exprimés *en fonction du temps* (ils sont comme les carrés des temps de parcours, conçus comme des durées également finies, ou temps moyens)[40] ; Newton avait ensuite universalisé le rôle du temps dans la mécanique en exprimant la loi générale des changements de mouvement pour un *instant* donné, résultant des forces auxquelles est soumis le mobile et dont l'effet se marque dans l'obtention des trajectoires à partir de l'étude locale de leurs propriétés. Et cependant, Newton ne définissait le temps de manière explicite que comme le flux de la durée, donc par son caractère continu, sans donner du *temps instantané* une conceptualisation autre qu'*opératoire*, par le passage à la limite vers le point considéré de la trajectoire et la tangente à celle-ci.

On trouve l'expression la plus nette et précise du temps instantané newtonien dans un passage, au début du Livre 1 des *Principia*, de l'exposé de sa « géométrie infinitésimale », ou géométrie selon le temps, qu'il appelait « méthode des premières et dernières raisons des grandeurs », lorsque ces grandeurs « naissantes et évanescentes », prises sur les trajectoires, et considérées par leurs rapports (ou « raisons », *ratio*), sont envisagées à la limite du mouvement qui les engendre ou les annule, « à l'instant même » où le mouvement naît ou cesse (ni un peu avant, ni un peu après)[41]. Et Newton donne encore cette précision : « Par dernière raison [ou rapport] de grandeurs évanescentes, on doit

---

38 D'Alembert reprend, au début de chacun de ses grands traités, la démonstration de son principe de la dynamique, en l'adaptant à l'objet considéré. Voir, en part. : D'Alembert, *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le système newtonien*, David, Paris, 1749. Lagrange considère, dans la *Mécanique analytique*, que l'une des applications les plus fructueuses du « principe de d'Alembert » aura été son traitement du problème de la précession des équinoxes : Lagrange, *Mécanique analytique*, *op. cit.* vol. 1, in *Œuvres*, vol. 11.

39 D'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, David, Paris, 1744 ; *Réflexions sur la cause générale des vents*, David, Paris, 1747 ; *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, David, Paris, 1752 (ces deux derniers utilisent la nouvelle branche du calcul développée par d'Alembert).

40 Voir, en particulier, les considérations sur les « degrés de vitesse » et le mouvement uniformément accéléré dans Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638 ; ré-éd., avec introd. et notes, par A. Carugo et L. Geymonat, Boringhieri, 1958 ; Trad. fr. par Maurice Clavelin, *Dialogues sur deux sciences nouvelles*, trad. A. Colin, Paris, 1970, Troisième Journée. Descartes ne recherchait pas l'expression des lois de la mécanique en fonction du temps, mais comme des lois de conservation.

41 Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, *op. cit.*, trad. angl., « Scholium » du Lemme 11, vol. 1, p. 39. Newton ne se sert explicitement des fluxions qu'au second livre des *Principia*, « Sur le mouvement des corps dans les milieux résistants » (en part., vol. 1, p. 249 et suiv.).

entendre le rapport des grandeurs non pas avant qu'elles s'évanouissent, ni après, mais avec lequel elles s'évanouissent »[42]. La valeur finie de ce rapport fixe exactement l'instant de l'« évanouissement », c'est-à-dire, en fait, le *temps instantané* considéré correspondant à la position choisie du mobile sur sa trajectoire. Étant seulement opératoire, le temps comme grandeur n'était pas l'objet d'une représentation explicite, ni géométrique, ni algébrique ; les raisonnement sur des intervalles de temps égaux passaient par la traduction de ces derniers en termes d'arcs ou de cordes correspondants pris sur la trajectoire.

Les variations de ces grandeurs considérées dans leurs rapports pouvaient être exprimées comme des rapports d'intervalles de temps. Newton considérait un diagramme des temps et des vitesses (déjà en usage chez les maîtres scolastiques de Paris et d'Oxford au XIV ème siècle[43]), à partir duquel il calculait l'espace parcouru (produit de la vitesse par le temps) par le mobile sous l'effet de la force, et concluait, par passage à la limite, que « les espaces décrits par un corps sollicité par une force finie quelconque, déterminée et constante ou continuellement augmentée ou diminuée, sont au tout début du mouvement dans le rapport des carrés des temps[44]. Il reprenait ce faisant, le raisonnement qui avait amené Galilée à la loi de la chute des corps, en lui donnant toutefois plus de généralité, puisque la force pouvait être aussi bien constante que variable. En faisant sienne cette même considération pour lui donner une forme algorithmique en termes d'éléments différentiels leibniziens, Varignon la restreignait au cas « d'une force centrale constante et uniformément appliquée », ce qui lui permettait d'écrire la force accélératrice sous la forme $y = \frac{ddx}{dt^2}$[45]. L'expression $dt^2$ avait la signification d'un carré (alors que $ddx$ est une différentielle du second ordre, d'où l'hétérogénéité de la formule usuelle qui est restée, $\frac{d^2x}{dt^2}$).

Quant à d'Alembert, il définissait l'accélération, comme nous l'avons vu plus haut, à partir d'une représentation graphique générale des espaces parcourus et des temps, qui est une géométrie abstraite, de pure construction, de l'espace et du temps conjoints. C'est, à y bien regarder, une hardiesse de la pensée, qui illustre son idée, exprimée plus tard, dans l'article « Dimension » de l'*Encyclopédie*, que l'on peut voir, d'une certaine façon, le temps comme une quatrième coordonnée ajoutée à celles d'espace. Dans cette géométrie, il faisait son approximation de la courbe d'espace et de temps d'équation $e(t)$ par le cercle tangent, obtenant directement pour l'accélération la différentielle seconde de la variable d'espace. Quant au $dt^2$ qui figure dans sa formule, il est dû à l'approximation polygonale de la courbe avec passage à la limite des tangentes en

[42] Newton, *Principia*, *op. cit.*, Livre 1, vol. 1, p. 39 de l'édition Cajori. En traduction anglaise : « with which they vanish ».

[43] Voir A. C. Crombie, *Augustine to Galileo. The history of scsience. A.D. 400-1650*, Falcon Press, London, 1952; ré-éd. augm., Heinemann, London, 1957 ; trad. fr. par Jacques d'Hermies *Histoire des sciences de Saint Augustin à Galilée (400-1650)*, Presses Universitaires de France, Paris, 2 vols., 1958 ; Marshall Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.

[44] Newton, *Principia*, *op. cit*., Livre 1, Lemme 10 (voir aussi le lemme 9), ed. Cajori, p. 34-35. (Traduit par moi, M.P.)

[45] Voir M. Blay, *La naissance de la mécanique* analytique, *op. cit.*, p. 183-184.

faisant l'hypothèse que les éléments de temps *dt* sont constants tandis que l'élément d'espace considéré reste « la différence seconde de l'espace parcouru »[46].

D'Alembert allait plus loin que Newton en se donnant du temps une représentation géométrique (grâce à l'équivalence entre un mouvement uniforme et une ligne des temps) et algébrique (par l'élément différentiel). Mais comme il reprenait la signification de l'élément différentiel en général, et de celui de temps en particulier, de la méthode des « premières et dernières raisons des grandeurs » de Newton et de son concept de limite, on peut s'étonner de ce qu'il n'ait pas reconnu, dans la formulation de Newton rappelée plus haut, la signification du temps instantané et continu. Il critique une formulation très voisine, reprise par plusieurs auteurs à propos des quantités infinitésimales en général (que Newton lui-même évitait, et il est vrai qu'il n'y est pas question du temps et de la mécanique), sans noter que son origine se trouve dans les *Principia* et dans un chapitre qui lui importait particulièrement[47]. On doit admettre que d'Alembert ne reconnaissait pas, dans ce type de formulation qualitative et seulement opératoire, le concept de temps instantané saisi dans la durée continue que l'analyse lui permettait d'expliciter et de mettre en œuvre d'une manière incomparablement plus précise.

Si la représentation géométrique et analytique du temps présentait un grand avantage pour la conceptualisation du temps instantané, cette conceptualisation n'en présentait pas moins encore un certain nombre de difficultés qui devaient se maintenir durant de nombreuses années, comme le montre l'histoire des commencements de l'analytisation de la mécanique. Cette difficulté était celle de faire du temps une grandeur dans le même sens que les autres grandeurs de la mécanique, puisqu'il échappe par nature à la représentation spatiale, même si l'on peut s'en donner une telle représentation en privilégiant le mouvement uniforme. Mais la difficulté était aussi celle de penser le temps comme à la fois continu et instantané (singulier) et, surtout, celle de concevoir exactement son rapport à l'action qui fait les changements de mouvements. La pensée de d'Alembert témoigne de ces difficultés, qui persistaient encore malgré la représentation du temps comme une grandeur différentielle, et qui demeureraient jusqu'au traitement complètement analytique de la mécanique que donnerait Lagrange. Dans la *Mécanique analytique*, en effet, l'expression différentielle du temps est prise, comme les autres grandeurs de la mécanique, dans sa signification algébrique, et ne demande pas à être autrement interprétée, par exemple à travers une représentation géométrique.

Chez d'Alembert, la compréhension du temps comme grandeur variable de la dynamique suscite, à côté de sa représentation algébrique analytique, une

---

46 D'Alembert, *Traité de dynamique*, 1ère éd. de 1743, *op. cit.*, première partie, chapitre 1, p. 15. Sur le temps comme quatrième dimension, voir M. Paty, « Les trois dimensions de l'espace et les quatre dimensions de l'espace-temps », *in* Dominique Flament (éd.), *Dimension, dimensions I*, Série Documents de travail, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 1998, p. 87-112.

47 « Quelques mathématiciens ont défini la quantité infiniment petite, *celle qui s'évanouit, considérée non pas avant qu'elle s'évanouisse, non pas après qu'elle est évanouie, mais dans le moment même où elle s'évanouit.* Je voudrais bien savoir quelle idée nette et précise on peut espérer de faire naître dans l'esprit par une semblable définition ? Une quantité est quelque chose ou rien ; *si elle est quelque chose*, elle n'est point évanouie ; *si elle n'est rien,* elle est évanouie tout à fait. C'est une chimère que la supposition d'un état moyen entre ces deux-là. » (D'Alembert, *Eclaircissements…*, « Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal », op. cit, p. 353, souligné par d'Alembert) ; voir aussi article « Différentiel », *op. cit.*

*interprétation géométrique* et une *interprétation physique* corrélatives l'une de l'autre. Une première difficulté dans le maniement de la grandeur temps (sans insister ici sur le temps absolu en tant que tel) tient à la définition newtonienne d'origine, qui repose sur une tautologie : « Le temps, absolu, vrai et mathématique, de lui-même et par sa propre nature, coule également [ou uniformément]… ». Dans la science du mouvement, le temps est la variable par rapport à laquelle les autres grandeurs définissent leur variation. Le temps, pris comme la variable fondamentale du mouvement, ne dépend que de lui-même. Mais comment qualifier la variation de cette variable ? le temps est uniforme par rapport à quoi ? si ce n'est par rapport au temps lui-même… Mais cette tautologie est significative : elle fait du temps la référence fondamentale du mouvement. Depuis Newton[48], cette uniformité du cours du temps est exprimée par l'égalité des intervalles linéaires parcourus dans des durées égales, qui se traduit dans l'approximation polygonale des trajectoires au point considéré avant le passage à la limite, quand on considère le changement de mouvement d'un mobile sur une trajectoire ; ce qui revient à poser, en notation leibnizienne, l'égalité des éléments *dt* à tout instant, comme on le rencontre chez tous les auteurs, de Varignon à Euler, d'Alembert, Lagrange…. (Mais nous allons voir une tentative différente, occasionnelle, chez d'Alembert, de considérer une réciprocité dans les variations du temps et du mouvement.)

Cette conception tautologique de l'uniformité du cours du temps est liée au privilège accordé au mouvement uniforme, en raison du principe d'inertie[49]. Et si le mouvement uniforme s'impose comme mesure naturelle du temps, c'est par son analogie directe (pour les rapports d'intervalles) avec le temps s'écoulant uniformément : « Le mouvement uniforme n'en est par là que plus analogue à la durée, et par conséquent plus propre à en être la mesure »[50]. D'une certaine manière, la naturalité du mouvement uniforme résout le paradoxe de concevoir un temps indépendamment des phénomènes (un temps absolu) tandis que sa détermination doit être faite à travers les lois des phénomènes. Toutefois, bien qu'il le conçoive ainsi, d'Alembert, dans ses « Remarques sur la mesure naturelle du temps » développées dans le chapitre 1 de la première partie du *Traité de dynamique*, consacré au principe de la force d'inertie, laisse entrevoir implicitement par sa formulation comment le temps pourrait être aussi bien déterminé (ou défini) en fonction du mouvement, au lieu de l'inverse[51]. Cela peut en effet être dit pour les mouvements variés : « Au contraire [du mouvement uniforme], toute loi d'accélération ou de diminution dans le Mouvement est arbitraire, pour ainsi dire [entendons par rapport à la nature du mouvement] et dépendante des circonstances

---

48 Voir, p. ex., Newton, *Principia*, op. cit., Livre 1, Section 2, sur la détermination des forces centripètes, p. 40, etc.

49 Cette assertion, qui postule l'égalité, au long du cours du temps, des intervalles de temps unité, n'est plus valide avec la théorie de la relativité générale qui, précisément, ne privilégie plus le mouvement uniforme : les durées sont dilatées dans les champs de gravitation ou dans les référentiels en mouvement accéléré. Voir, p. ex., M. Paty, « Sur l'histoire du problème du temps : le temps physique et les phénomènes », *in* Etienne Klein et Michel Spiro, (éds.), *Le temps et sa flèche*, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1994, p. 21-58 ; Collection Champs, Flammarion, Paris, 1996, p. 21-58.

50 D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, première partie, chapitre 1, p. 11.

51 D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, première partie, chapitre 1, p. 12.

extérieures »[52]. Cependant d'Alembert en conclut seulement que les mouvements variés ne peuvent constituer une mesure naturelle du temps.

Mais, comme ce que nous pouvons connaître, c'est l'« analogie », c'est-à-dire le rapport « entre le rapport des temps et celui des espaces parcourus », il faut admettre une réciprocité entre les parties du temps et les parties d'espace liées par le mouvement : en langage différentiel, entre $dt$ et $de$, et l'une ou l'autre variable, $t$ ou $e$, pourrait être prise comme l'argument de l'autre. C'est sans doute par une considération de ce genre que d'Alembert s'est proposé à plusieurs reprises de concevoir $dt$ comme variable et non comme constante, comme cela était ordinairement admis, même s'il rapportait le plus souvent la variation d'un mouvement à $dt$ = cte, et dès sa définition même de l'accélération par la différence seconde, comme nous l'avons relevé[53].

Ses tentatives à cet égard sont suffisamment frappantes et peu communes pour que Lagrange les fasse remarquer dans sa *Mécanique analytique*. Evoquant la difficulté pratique de transcrire en équation le principe de la dynamique de d'Alembert dans les problèmes particuliers, Lagrange écrit en note : « Ce qui contribue encore à compliquer ces solutions, c'est que l'auteur veut éviter de faire des $dt$, ou éléments du temps, constants, comme il en avertit lui-même (art. 94) »[54]. La remarque de d'Alembert à l'article indiqué est la suivante : « J'ai évité de faire dans la solution de ce problème les $dt$ ou éléments du temps constants, afin de pouvoir parvenir à l'équation de la courbe sans avoir l'expression de la vitesse, ce qui serait nécessaire si on faisait les $dt$ constants, parce que $dt$ étant $\frac{dx}{u}$, on ne peut chasser $dt$ que quand on connaît la valeur de $u$. (…) »[55]. Dans le problème traité, on peut effectivement préférer construire la figure en considérant des arcs de courbe qui ne se rapportent pas à des $dt$ constants. Cela correspond à un changement de variable donnant des relations plus commodes à manier. On trouve d'autres traitements semblables à divers endroits de l'œuvre de d'Alembert.

Son souci de rester libre de considérer le temps $t$ comme une variable de variation quelconque (avec un $dt$ variable) est relié à la possibilité de choisir la variable uniforme de référence en fonction du problème de dynamique traité. Quand il invoque des $dt$ non constants, c'est qu'il doit mettre en comparaison des éléments de lignes pris sur deux courbes, l'une étant la trajectoire effective, l'autre une trajectoire de référence dont la première serait une déformation, due à la loi du mouvement. On peut alors choisir de prendre l'une, avec des $dt$ constants, ou l'autre, avec des $dt$ variables. Ce qui est intéressant dans cette considération du cas général, c'est que la variation du temps est considérée comme relative à la variation du phénomène envisagé, ce qui fait perdre au temps, si l'on y réfléchit, son caractère absolu, mais seulement en pratique, car d'Alembert n'a jamais rejeté le

---

[52] D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, première partie, chapitre 1, p. 11.

[53] D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, première partie, chapitre 1, art. 17, p. 15. Voir plus haut.

[54] Lagrange, *Mécanique analytique*, 1ère éd., 1788 ; 3 ème éd. préparée par J. Bertrand (1853), in Lagrange, *Œuvres*, t. 11, 1888, p. 256. Lagrange se réfère à la seconde édition du *Traité de dynamique* (p. 108). L'article correspondant (identique) de la première édition est l'art. 80 (p. 77).

[55] D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, première éd., 1753, deuxième partie, chapitre 3, art. 80, p. 77, le problème correspondant étant le problème 2 du chapitre 3, art. 79, p. 74-77 ; deuxième éd., 1758, art 94, p. 108, et art. 93, p. 104-108.

temps absolu de Newton, bien qu'il tempère sa conception du temps par des réflexions assez leibniziennes[56]. En fait, pour lui, le temps est une grandeur pour la description des phénomènes physiques, et sa représentation mathématique (analytique) doit permettre la plus grande souplesse à l'égard de la description de ces phénomènes. La possibilité est également ouverte de considérer des variations relatives où le temps ne figurerait pas explicitement.

Le souci de d'Alembert à l'égard de la possibilité de choisir la variation du temps que l'on veut se rattache, en fait, tout simplement à sa manière de traiter les problèmes d'analyse d'une manière générale. A l'article « Différentiel » de l'*Encyclopédie*, considérant des équations différentielles du second ordre (avec la différence seconde $ddy$, par exemple dans $\frac{ddy}{dx}$) où l'on suppose en général que $dx$ est constant, d'Alembert envisage que $dx$ ne le soit plus (ceci étant relié au calcul aux dérivées partielles). Il suffit alors, explique-t-il, de tout diviser par $dx$ et de remplacer $\frac{ddy}{dx}$ par : $d(\frac{dy}{dx}) = \frac{ddy}{dx} - \frac{dyddx}{dx^2}$, « et on aura une équation où rien ne sera constant »[57].

On peut rapporter à la représentation géométrique de l'élément différentiel de temps la question de la *difficulté du « facteur 2 »* telle qu'elle apparaît chez d'Alembert. Mais elle est, en fait, plus générale, et tient à la manière dont on effectue l'approximation polygonale, puis le passage à la tangente, dans l'étude locale des trajectoires. Ce problème a, en fait, à voir avec celui de la modalité de l'action de la cause, et à la représentation de la force accélératrice. Johann Bernoulli et Varignon l'avaient rencontré à propos de la durée de l'action de la force : la force agit-elle au début de $dt$, puis n'agit plus qu'au début de l'instant suivant ; ou bien continue-t-elle d'agir pendant $dt$ ? (On voit bien que la question tient à ce que l'on entend par $dt$ du point de vue physique). Dans ce dernier cas, l'espace parcouru correspondant à l'élément de vitesse $dv$ serait $\frac{1}{2}ddx$. D'Alembert ne manque pas d'indiquer ce problème à chaque fois qu'il le rencontre, d'abord dans le *Traité de dynamique* (notamment dans une « Remarque sur la comparaison des forces accélératrices entre elles », ainsi que, dans le chapitre sur le mouvement composé, à la section « Du mouvement en ligne courbe et des forces centrales »), puis dans les *Réflexions sur la cause générale des vents* et dans d'autres ouvrages, y compris dans plusieurs articles de l'*Encyclopédie* comme : « Central », « Courbe », « Différentiel » [58]. Il y a une différence d'un facteur 2 suivant que l'on calcule la force accélératrice pour la courbe rigoureuse (en prenant la tangente en un point) ou pour la courbe polygone approchée (en prenant la corde) : les deux

---

56 Dans ses « Eclaircissements sur l'espace et le temps », *op. cit.*

57 Il renvoie à la seconde partie du *Traité de calcul intégral* de Bougainville (« qui ne tardera pas à paraître »), ainsi qu'aux *Oeuvres* de Jean Bernoulli, t. 4, p. 77. Voir Louis Antoine de Bougainville, *Traité du calcul intégral pour faire suite à l'Analyse des infiniment petits de Mr le marquis de l'Hospital*, 2 vols., Paris, 1754 et 1756. On sait que d'Alembert a très largement inspiré ce traité de son disciple.

58 D'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, 1743, p. 20-22 ; 29 ; art. 26, p. 27-30 ; *Réflexions sur la cause générale des vents*, *op. cit.*, 1747, p. p. 69-70. Dans l'article « Différentiel », d'Alembert montre en détail comment on peut se tromper sur la dérivée, comme Newton l'avait fait pour $z^n$, en donnant la moitié de l'expression vraie (il avait pris la sous-tangente de la courbe). Dans le *Traité de dynamique* (éd. 1743, première partie, chapitre 2, p. 22), il renvoie à l'*Histoire de l'Académie* de 1722, où la question avait été débattue.

cas sont équivalents et conduisent aux mêmes équations, si l'on reste cohérent ; il suffit donc, pour ne pas se tromper, de maintenir son choix pour l'un ou l'autre cas, et ne pas les mêler. Mais nous nous en tiendrons là sur ce sujet, qui a été largement commenté par les intéressés à l'époque, ainsi que par les historiens des sciences[59].

## 5. LE « PROBLEME RECURRENT » DE LA DYNAMIQUE OU LA CAUSE PHYSIQUE DANS LE TEMPS

Dans le *Traité de dynamique* et dans d'autres ouvrages, d'Alembert évoque de manière récurrente la modalité de l'acquisition initiale du mouvement (pour les mouvements d'inertie) ou du changement de mouvement (pour les mouvements accélérés ou retardés), d'une manière qui peut de prime abord surprendre. Elle semble à première vue, en effet, renvoyer simplement à des hypothèses « métaphysiques » auxquelles le mouvement effectif est étranger et dont on devrait donc, à ses yeux, se passer dans la connaissance du mouvement. Ce rejet des causes concerne aussi bien les mouvements d'inertie, déjà acquis, que les mouvements produits.

Pour ce qui concerne les *mouvements acquis,* il s'interroge ainsi dans la préface au *Traite de dynamique* de 1743 : « Un corps continue-t-il à se mouvoir de lui-même, ou a-t-il besoin de l'action répétée de la cause [qui a donné le mouvement] ? Quelque parti qu'on put prendre là-dessus (…) [le mouvement qu'il suivra sera uniforme…] »[60]. La formulation est plus précise dans l'ouvrage même, au chapitre 1 de la première partie, qui traite du mouvement d'inertie : le mouvement se poursuit uniformément en ligne droite, « car ou l'action *indivisible et instantanée* de la cause motrice au commencement du mouvement suffit pour faire parcourir au corps un certain espace, ou le corps a besoin, pour se mouvoir, de *l'action continuée* de la force motrice… » Dans le premier cas, la communication du mouvement se sera faite en un instant, et dans ce cas le mouvement restera uniforme (la démonstration s'appuie sur les propriétés de la ligne droite) ; dans le second, elle aura résulté d'une action continuée, mais qui restera uniforme et constante (car rien ne vient déterminer la cause motrice initiale à augmenter ou à diminuer), de sorte que l'effet net sera le même dans les deux cas[61].

Le second cas envisagé paraît considérer la possibilité d'un moteur du mouvement (tel que celui de la doctrine de l'*impetus*), qui conserverait celui-ci contre une tendance naturelle à ralentir, selon l'expérience commune (« comme il semble que l'expérience le prouve », écrit d'Alembert) ; le propos est clairement pédagogique, et d'Alembert précise que lui-même ne pense pas que ce puisse être le cas : « Ce n'est pas que je croie l'action continuée de cette cause, nécessaire pour

---

59 Voir, notamment, Thomas Hankins, *Jean d'Alembert, science and the enlightenment*, Oxford University Press, Oxford, 1970 ; Pierre Costabel et Jeanne Peiffer, édition critique de la correspondance de Johann Bernoulli (*Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 2: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, Erste Teil (1692-1702); Zweiter Teil (1702-)*, Birkhauser, Basel, vols. 1 et 2, 1988-1991 ; M. Blay, *La naissance de la mécanique analytique, op. cit.*

60 D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Préface, p. viii.

61 D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Première partie, chapitre 1, p. 4-6. (Souligné par moi, M.P.)

mouvoir le corps ». Mais, par sa démonstration, il en balaie en fait l'hypothèse, réduisant par là même les principes d'intelligibilité qui fondent la considération du mouvement : il faut seulement accepter l'existence du mouvement pour conclure à sa conservation en l'absence d'action extérieure.

D'Alembert apporte ici une autre précision intéressante, qui pourra nous éclairer sur la modalité de changement de mouvement, qu'il étudie plus loin : « si l'action instantanée ne suffisait pas, quel serait alors l'effet de cette action ? et si l'action instantanée n'avait point d'effet, comment l'action continuée en aurait-elle ? » [62]. On voit ici la trace d'une difficulté à concilier le *singulier* et le *continu* dans la conception du temps instantané. Mais c'est la considération de la *variation du mouvement* qui lui permettra de formuler d'une manière précise et opératoire l'action instantanée de la cause, en continuité avec l'action précédente, puisque cette variation est elle-même acquisition d'un mouvement, mais cette fois dans un intervalle différentiel de temps.

Concernant les *changements de mouvements* en raison d'une cause, cause qui peut être soit l'impénétrabilité des corps, dans l'impulsion par chocs, soit leur attraction à distance, d'Alembert indique, dans la Préface : « Il est évident que *l'effet produit par la cause, soit dans un temps fini, soit dans un instant*, doit toujours être donné par l'équation entre les temps et les espaces »[63]. Et il précise, au chapitre 2 de la première partie, sur le mouvement composé : « J'ai donc cru (…) faire voir que le chemin du corps A est le même, *soit* que les deux puissances [qui s'exercent sur lui, chacune dans une direction donnée] n'agissent sur lui que *dans le premier instant*, *soit* qu'elles agissent *continuellement* toutes deux à la fois sur le corps »[64]. Cependant, une remarque faite au chapitre précédent (chapitre 1) sur le mouvement uniforme, après avoir considéré les mouvements variés par modification du premier (et défini ainsi les grandeurs du mouvement varié, comme nous l'avons vu plus haut), apparaît importante quant au problème de la modalité physique proprement dite de la communication du mouvement.

Dans l'approximation polygonale de la courbe des espaces et des temps, l'espace parcouru par l'effet de la cause accélératrice (ou retardatrice) l'est avec une vitesse uniforme, *du* : « On voit par là, indique d'Alembert, de quelle manière on peut réduire à un mouvement uniforme l'effet instantané de la puissance qui accélère ou qui retarde le mouvement » [65]. Cette remarque est augmentée dans la deuxième édition, de 1758, de la précision suivante : si la courbe est donnée (par son équation en termes finis) et non reconstituée par les considérations locales, l'équation différentielle est obtenue directement (par différentiation), et la distance parcourue $dde$ ($=\varphi dt^2$) est véritablement une différence seconde[66]. Cela étant, indique-t-il dans une autre remarque complémentaire, on doit concevoir différemment les modalités de l'action dans deux cas. Dans le cas de l'approximation polygonale, avec un élément de vitesse constant, on doit considérer

---

[62] D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Première partie, chapitre 1, p. 6-8.

[63] D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Préface, p. xi. (Souligné par moi, M.P.)

[64] D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Première partie, chapitre 1, art. 22, p. 24-25.

[65] D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Première partie, chapitre 1, p. 21.

[66] D'Alembert le rend explicite par un calcul donné en note de bas de page (due, comme les autres de la seconde édition, à Etienne Bezout) : D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 2 ème éd., 1758, Première partie, chapitre 1, p. 27.

que cet accroissement de vitesse s'est effectué « brusquement et comme d'un seul coup », et non par degrés, *au début de l'instant infinitésimal* considéré. Dans le cas de la courbe rigoureuse, les éléments d'espace (*dde*) parcourus en raison du changement de mouvement sont proportionnels au carré des « *instants* » (c'est-à-dire des éléments différentiels de temps, *dt*), et la vitesse correspondante (*du*) « est censée s'accélérer ou se retarder uniformément pendant tout le cours de l'instant (…) en vertu de la puissance accélératrice… ». D'Alembert indique à cet endroit comment on peut concevoir ce changement incessant (continu) : « [la puissance accélératrice] est censée donner au mobile pendant cet instant une suite de petits coups égaux et réitérés [dont la somme] est égale au coup unique [censé être donné] au corps dès le commencement de l'instant (…) dans l'hypothèse de la courbe polygone »[67].

On constate ainsi que la « clause récurrente » sur les modalités de l'action de la cause dans les changements de mouvements correspond à une préoccupation constante de d'Alembert, qui court à travers les différentes éditions du *Traité de dynamique.* On peut voir trois raisons à cette préoccupation. La première est l'indifférence, déjà mentionnée, en ce qui concerne la connaissance du mouvement, de la question « métaphysique » des causes et de leur mode d'action ; en montrant que la connaissance du mouvement par son équation différentielle des espaces et des temps est la même dans les deux cas, il montre par là même, sinon l'inanité, du moins le peu d'importance de la question, même du point de vue physique. Pourtant, cette raison ne suffit pas à rendre compte à elle seule de la précision de l'argumentation, notamment si l'on considère les ajouts de la seconde édition du *Traité*. Une seconde raison, directement opératoire, est le souci de rendre compte des changements de mouvement aussi bien *continus*, tels que ceux causés par l'attraction ou la pression, que *discontinus*, produits par des chocs de corps durs ou élastiques. Une troisième raison, également vraisemblable, se rapporte à la représentation géométrique de l'élément différentiel de temps *dt* et à son mode d'utilisation, pour des trajectoires prises soit directement suivant les courbes, soit suivant les séries de lignes polygonales inscrites ou circonscrites qui en constituent l'approximation infinitésimale. Ce mode d'utilisation pourrait, ou non, correspondre à la description d'une modalité d'action réelle. Ces deux dernières raisons paraissent les plus significatives, et elles concernent *la pensée physique de la dynamique*, en même temps que son *traitement analytique*[68].

Newton lui-même mentionnait le problème, dans les *Principia*, juste après l'énoncé de la seconde loi du mouvement, selon laquelle « le changement de

---

[67] D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 2 ème éd., 1758, Première partie, chapitre 1 (Remarques sur les forces accélératrices, Remarque 3), p. 30-31. Ici s'insère la question du facteur 2, évoquée précédemment.

[68] Pierre Costabel a cru devoir souligner, pour les regretter, « quelques embarras » de d'Alembert qui dit rejeter les causes tout en fondant sur elles son raisonnement, etc. (voir plus loin). Le moins que l'on puisse dire est que cet érudit aura ici manqué de perspicacité, en ne voyant pas qu'il s'agit d'une construction mathématique de grandeurs physiques. Voir Pierre Costabel, « De quelques embarras dans le *Traité de dynamique* », *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984, 39-46. Notre méthode historique a été, au contraire, de tenter d'entrer dans les raisons de d'Alembert, considérant ses conceptions et les travaux par rapport auxquels il se situait. Le lecteur d'aujourd'hui ne peut ignorer qu'il doit ses connaissances et sa manière de voir actuelle aux travaux de création tels que ceux de d'Alembert, qui ont porté non seulement sur des contenus de connaissance, mais aussi sur la mise en place des conditions de leur intelligibilité.

mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée ; et il se fait dans la direction de la ligne droite sur laquelle cette force est imprimée ». Il faisait le bref commentaire suivant : « Si une force quelconque engendre un mouvement, une force double engendrera un mouvement double, une force triple un mouvement triple, *que cette force soit imprimée en totalité et d'un seul coup* (*altogether and at once*), ou bien *graduellement et successivement* (*gradually and successively*). »[69] Cette alternative, posée sans insister, et qui n'est pas reprise par la suite dans l'ouvrage, désigne vraisemblablement les deux genres de mouvements que sa deuxième loi rassemble et unifie : les mouvements *discontinus*, transmis par chocs entre corps durs ou élastiques (évoqués un peu plus loin dans le Scolie[70]), et les mouvements *continus*, résultant d'une application continue de la force, comme celle d'attraction. D'ailleurs Newton précise, mais à propos de la troisième loi, de l'action et de la réaction, que « cette loi a lieu aussi dans les attractions », ce qu'il commente également plus avant dans le même scolie[71]). Les deux possibilités envisagées recouvrent la distinction, traditionnelle avant Galilée, entre les « mouvements violents » et les « mouvements naturels », qui s'efface sous l'unique traitement de ces deux genres de forces par la seconde loi. Il est entendu, pour Newton, que *cette loi est mathématique*, puisque la vraie force et les vraies grandeurs du mouvement sont mathématiques. Il indique à plusieurs reprises dans les *Principia*, qu'il ne veut « donner que les notions mathématiques des forces, *sans considérer leurs causes et assises physiques* »[72]. Et « le lecteur ne doit pas s'imaginer que je veuille par ces mots définir le genre ou la manière d'une action, les causes ou les raisons physiques….[73]. Newton n'avait donc pas de raison d'évoquer autrement la question, qui n'était plus affaire que de géométrie.

Que d'Alembert éprouve le besoin d'insister et de reprendre avec constance sa « clause récurrente » c'est, par comparaison avec la sobriété de Newton sur ce point, précisément par souci de se référer au caractère *physique* du mouvement et de sa transmission, qui n'est pas, pour lui, a priori identique à un traitement purement mathématique sur des grandeurs idéales, et qui demande justification. Cette justification est proposée dans chacun des deux cas de figure évoqués, par un raisonnement qui considère les *grandeurs physiques* (les distances parcourues dans un certain temps, avec leurs directions), munies évidemment de leur représentation mathématique. Ces modifications de grandeurs, ou ces grandeurs naissantes, sont l'effet, en tant que changement du mouvement, de la cause physique de ce changement, qui opère de manière physique, au temps $t$ considéré et suivant l'élément de durée $dt$ (dénommé « l'instant »), avec des effets physiques (l'espace parcouru par le corps suit une loi différentielle temporelle donnée).

---

69 Newton, *Principia*, éd. Cajori, vol. 1, p. 13. (Souligné par moi, M. P.).

70 Newton, *Principia*, éd. Cajori, vol. 1, p. 22-25. Pour Newton, les lois sont suivies par les corps, indépendamment du fait qu'ils soient durs, élastiques ou mous, mais on le met directement en évidence avec les corps durs, référence faite aux travaux sur les lois des chocs de Christopher Wren, John Wallis et Christiaan Huygens.

71 Newton, *Principia*, éd. Cajori, vol. 1, p. 25-25.

72 Newton, *Principia*, éd. Cajori, vol. 1, p. 5, à propos des forces motrices. Et encore, à propos des forces d'attraction et d'impulsion : « considérant ces forces non pas physiquement, mais mathématiquement » (*ibid.*). (Souligné par moi, M. P.)

73 Newton, *Principia*, éd. Cajori, *ibid.*, p. 5-6.

L'identité du résultat obtenu dans les deux cas (au début de *dt*, ou durant *dt*) montre que la considération de *dt* suffit, en fait, à absorber le problème, à effacer le sens de la question sur la *modalité différentielle* de l'action physique. L'élément différentiel de temps *dt*, quantité qui n'est ni finie, ni nulle, s'avère être l'instrument conceptuel d'intelligibilité qui permet de traiter physiquement des causes par leurs effets concomitants, sans se soucier de ce que sont ces causes, y compris quant à la modalité de leur action. En même temps, l'identité du traitement par l'analyse dans les deux cas assure que l'on peut décrire d'une même façon les variations de mouvement continues (par attraction, ou par pression) et discontinues (par impulsion et chocs). Il faudrait ici reprendre la question, qui court au long du XVII ème siècle et de la première moitié du XVIII ème, des chocs des corps durs et des corps élastiques[74]. Disons seulement que d'Alembert ramène le changement de mouvement dû aux impulsions de corps durs à un traitement différentiel (à la considération d'équations différentielles), à l'aide de la pensée différentielle des grandeurs et de la notion de mouvement virtuel. On peut traiter de la même façon le mouvement par choc et le mouvement continué, en raison de la co-extensivité de la cause (ou force) et de son effet suivant le temps de son application (instantané et différentiel), qui rend équivalentes les manières d'agir de ces deux types de causes.

Il est tentant, à cet égard, de penser que tel est le sens de la remarque de d'Alembert indiquant, au début du *Traité de dynamique*, qu'il s'intéressera surtout dans cet ouvrage aux mouvements par impulsion (dans les problèmes traités dans la seconde partie), les autres (ceux d'attraction) ayant été davantage considérés jusqu'ici. Il y ramène bien, en effet, les mouvements par impulsion et contact (les mouvements complexes de systèmes de corps), à l'analyse, qui porte sur le continu, au lieu de l'inverse, que serait ramener les mouvements continus comme l'attraction à des mouvements par impulsion[75]. C'est le rôle propre de l'analyse et des grandeurs de la dynamique pensées avec son aide qui lui en ont donné les moyens. Mais c'est aussi la possibilité de penser les mouvements (vitesses et quantités de mouvement, finies aussi bien que différentielles) avec la notion de mouvement virtuel, liée à celles de mouvement détruit et de tendance au mouvement (par exemple, avec le « mouvement naissant »). Le problème de l'occurrence d'un changement de mouvement est le même que celui de la naissance d'un mouvement, soit fini, soit infinitésimal (au sens de différentiel, qui est conceptuellement dominé).

D'Alembert indique, dès le début du *Traité de dynamique*, à propos du mouvement uniforme, que, si deux accélérations égales et de sens contraires sont

---

74 Voir Newton, *Principia*, *op. cit.*, « Scolie » des « Axiomes ou lois du mouvement » (Livre 1) ; d'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, Première partie, chapitre 3 (« De l'équilibre »), et Deuxième partie, chapitre 3, paragraphes « Des corps qui se poussent ou se choquent », 1 ère éd., 1753, p. 138 et suiv. ; 2 ème éd., p. 211-252 ; Paul Mouy, *Les lois du choc des corps d'après Malebranche*, Vrin, Paris, 1927 ; T. Hankins, *D'Alembert*, *op. cit.*, chap. 8 ; Jérôme Viard et Ismael Youssouf, « Les relations entre élasticité et dureté dans le Traité de dynamique et dans l'Encyclopédie sont-elles compatibles ? Application à la «déduction» des lois du choc des corps élastiques de celle des corps durs », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, n°22, avril 1997, 123-145 ; Ryoichi Nakata, « Concept of force in Jean Le Rond D'Alembert », sous presse ; « The general principles for resolving mechanical problems in d'Alembert, Clairaut and Euler », *Historia scientiarum*, 12, n°1, 2002, 18-42.

75 Tel le soupçon de néo-cartésianisme suggéré par Hankins pour d'Alembert, quand tout indique le contraire.

appliquées aux corps, elles se font équilibre et s'annulent : le mouvement d'inertie, uniforme, persiste. L'exemple invoqué pour visualiser un tel cas est celui de la pesanteur équilibrée par la résistance d'un fluide[76]. (On peut voir là une trace de la pensée qui a guidé d'Alembert vers l'énoncé de son principe, à partir des problèmes d'équilibre des solides dans les fluides de ses trois premiers mémoires de mécanique présentés à l'Académie des sciences en 1741 et 1742)[77]. Il est possible d'obtenir l'équilibre en annulant les sollicitations au mouvement contraires, que d'Alembert exprime immédiatement comme des accélérations, c'est-à-dire comme des éléments différentiels de vitesse égaux et opposés : $dv$ et $-dv$. On note ici, à la fois, la pensée de l'infinitésimal ou du différentiel et *la conception dynamique de l'équilibre*, c'est-à-dire les vitesses virtuelles. On se souvient de la remarque de d'Alembert, lorsqu'il construit la grandeur accélération, indiquant que l'expression de la vitesse du corps mû soumis à une accélération ou décélération « pour un instant donné, doit être la même qu'elle serait, si dans cet instant le mouvement cessait d'être accéléré ou retardé ». Ce sont de tels mouvements virtuels qui permettent de concevoir le mouvement naissant, c'est-à-dire l'accélération instantanée. Le mouvement qui est en train de recevoir une accélération naissante suscite l'idée d'un mouvement comme tendance, et d'une réversibilité de cette tendance, de ce premier mouvement naissant : il est et peut ne plus être, être annulé. L'idée de mouvement virtuel engendre l'idée d'accélération et aussi l'idée de mouvement détruit (cette dernière conduisant au principe de d'Alembert). Le mouvement virtuel permet d'homogénéiser les différentes sortes de mouvements. Newton réduisait ou unifiait *mathématiquement* ces différents types de mouvement par son concept de force, d'Alembert l'effectue *physiquement* par le mouvement virtuel. *Le calcul différentiel permet de réaliser concrètement le mouvement virtuel*[78], et les deux ensemble permettent de concevoir un mouvement fini (comme celui échangé dans un choc) par continuité avec un mouvement naissant[79].

Nous avions relevé, au début de ce travail, comment d'Alembert, parlant *philosophiquement* de la science du mouvement des corps, employait de préférence le mot de *mécanique*, pour la caractériser comme un domaine propre de la connaissance. Nous pouvons maintenant conclure, conformément au titre donné par lui-même à son premier traité sur cette matière, et également au nom attribué à son principe fondamental qui lui servit de guide tout au long de son œuvre, que c'est la *dynamique* qui a retenu son *approche scientifique* (son approche de *géomètre*, selon l'appellation d'alors) dans ce domaine. Ce qui permettait, à son époque, de formuler en la renouvelant la mécanique parmi les sciences, c'était bien

[76] D'Alembert, *Traité de dynamique, op. cit.*, 1743, Première partie, chapitre 1, p. 8.

[77] Voir G. Grimberg et M. Paty, « La genèse hydrodynamique du principe de d'Alembert », *op. cit.*

[78] Lagrange reprendrait cette manière de penser le mouvement : il écrit, à propos des vitesses virtuelles, dans la Mécanique analytique, *op. cit., in Œuvres*, vol. 11 , p. 19 : la vitesse virtuelle est « celle qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu, c'est-à-dire la vitesse que ce corps prendrait réellement dans le premier instant de son mouvement… ».

[79] Pour plus de précision sur ce point, voir d'Alembert, *Traité de dynamique*, *op. cit.*, Deuxième partie, chapitre 3, paragraphes « Des corps qui se poussent ou se choquent », 1 ère éd., 1753, p. 138-168 ; 2 ème éd. (sensiblement différente), p. 211-252, et M. Paty, « Principes de la mécanique et analyse chez d'Alembert. Le point de vue conceptuel », *op. cit.*

la possibilité de poser et de résoudre les problèmes de la *dynamique*, c'est-à-dire les principes, les grandeurs et les lois des variations du mouvement des corps qui interviennent dans des *conditions physiques* données. Nous avons vu comment, s'il fallait bien partir de la considération des *causes*, en leur donnant un sens physique aussi précis qu'il se puisse, celles-ci se trouvèrent subsumées sous la *formulation analytique* qui écrit ces lois en forme d'*équations différentielles* dans tous les cas que l'on puisse concevoir. Le choix même du terme de *dynamique* par d'Alembert pour caractériser son travail indiquait d'entrée, pour qui savait le voir, que sa mécanique, toute rationnelle qu'elle se proposât d'être, était une science du monde physique, ce qui fournit une clé de sa manière de la penser : une clé qui est en même temps celle de la constitution de la pensée analytique de la physique.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1743]. *Traité de dynamique*, David, Paris, 1743. 2ème éd., modif. et augm., David, Paris, 1758.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1744]. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, David, Paris, 1754.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1747]. *Réflexions sur la cause générale des vents*, David, Paris, 1747. (Texte original en latin, 1746 : pièce qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des Sciences de Berlin pour l'année 1746).

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1749]. *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le système newtonien*, David, Paris, 1749.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1751a]. *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, 1751 ; repris dans les *Mélanges* de d'Alembert, 1753 ; 1767. Ré-éd., présentée et annotée par Picavet, Armand Colin, Paris, 1894. Nlle éd., introduite et annoté par Michel Malherbe, Vrin, Paris, 2000.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1749-1752]. *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, David, Paris, 1752. (Trad. par d'Alembert sur l'original en latin soumis au concours de l'Académie de Berlin en nov. 1749).

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1754-1756]. *Recherches sur différents points importants du système du monde*, 3 vols., Paris, 1754-1756.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1758]. *Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Paris, 1758. *In Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires de d'Alembert*, vol. 2, Bastien, Paris, 1805 [suivi des *Êclaircissements*]. Ré-éd., préface de Richard N. Schwab, Olms Verlag, Hildesheim, 1965 ; autre ré-éd, sans préface, Fayard, Paris, 1986.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1765]. *Eclaircissements à l'Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Paris, *in* d'Alembert, *Mélanges* (d'Alembert [1759-1767]), vol. 5, Paris, 1765 ; repris dans les éditions de 1965 et 1986 des *Eléments de philosophie*.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1759-1767]. *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, Zacharie Chatelain et fils, Amsterdam, 5 vols., 1759-1765 ; 1770.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1805]. *Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires de d'Alembert*, Bastien, Paris, 1805, 18 vols.

D'ALEMBERT, Jean le Rond [1821]. *Œuvres philosophiques, historiques et littéraires*, 5 vols., Belin, Paris, 1821 ; ré-éd., Slatkine Reprints, Genève, 1967.

D'ALEMBERT, Jean le Rond, et DIDEROT, Denis (éd.) [1751-1780]. *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, 17 vols + 11 vol. de planches, Briasson, David, Le Breton et Durant, Paris, 1751-1780.

AUROUX, Sylvain et CHOUILLET, Anne-Marie (dirs.) [1984]. *D'Alembert (1717-1781), Dix-huitième siècle*, n° 16 (numéro spécial), 1984.

BERNOULLI, Johann [1989-1991]. *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 2: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, Erste Teil (1692-1702)*; *Zweiter Teil (1702-)*, Bearbeit und Kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer, Birkhauser, Basel, 1988 (vol. 1), 1991 (vol. 2).

BLAY, Michel [1992]. *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIè et XVIIIè siècles*, Presses Universitaires de France, Paris, 1992.

BOUGAINVILLE, Louis Antoine de [1754-1756]. *Traité du calcul intégral pour faire suite à l'Analyse des infiniment petits de Mr le marquis de l'Hospital*, 2 vols., Paris, 1754 et 1756.

BOS, H.J.M. [1980]. Mathematics and Rational Mechanics, *in The Ferment of Knowledge. Studies in the Historiography of Eighteen Century Science.* Cambridge University Press, 1980.

CLAGETT, Marshall [1959]. *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.

CASSIRER, Ernst [1932]. *La philosophie des Lumières* (original alld., 1932), trad. fr. par Pierre Quillet, Fayard, Paris, 1966.

COSTABEL, Pierre (1984). De quelques embarras dans le *Traité de dynamique*, *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984, 39-46.

CROMBIE, A.C. [1952]. *Augustine to Galileo. The history of scsience. A.D. 400-1650*, Falcon Press, London, 1952; ré-éd. augm., Heinemann, London, 1957; trad. fr. par Jacques d'Hermies *Histoire des sciences de Saint Augustin à Galilée (400-1650)*, Presses Universitaires de France, Paris, 2 vols., 1958.

DESCARTES, René [1728]. *Regulæ ad directionem ingenii* (vers 1728), in AT, vol. 10, p. 349-48 ; trad. en fr., *Règles pour la direction de l'esprit*, Paris, Vrin, 1970.

DESCARTES, René [1637]. *Discours de la méthode, suivis d'Essais de cette méthode* : *La Dioptrique*, *Les Météores*, *La Géométrie*, Leyde, 1637; in Descartes [1964-1974] (AT), vol. 6.

DESCARTES, René [1644]. *Principia philosophiæ*, 1ère éd. princeps, Louis Elzevier, Amsterdam, 1644 ; in Descartes [1964-1974] (AT), vol. 8, p. 1-353. Trad. en français (1647), *Principes de la philosophie*, in Descartes [1964-1974] (AT), vol. 9, p. 1-362.

DESCARTES, René [1964-1974]. *Oeuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, 11 volumes (1ère éd., 1896-1913) ; nouvelle édition révisée, 1964-1974; ré-éd., 1996. [Edition indiquée AT dans les notes].

EMERY, Monique et MONZANI, Pierre (eds.) [1989]. *Jean d'Alembert, savant et philosophe. Portrait à plusieurs voix*, Archives contemporaines, Paris, 1989.

EULER, Leonhard [1736]. *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Acad. des Sciences, Saint-Pétersbourg, 1736, 2 tomes ; éd. par Paul Stäckel, Teubner, Leipzig et Berlin, 1912. (*Opera omnia*, series 2 : *Opera mechanica et astronomica*, vols. 1 et 2).

EULER, Leonhard [1750]. Découverte d'un nouveau principe de méchanique, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 6 (1750), 1752, p. 185-217. Repris dans L. E., *Opera Omnia*, series 2 : *Opera mechanica et astronomica*, vol. 5, éd. par Joachim Otto Fleckenstein, Lausanne, 1957, p. 81-109.

EULER, Leonhard [1926]. *Leonhardi Euleri commentationes physicae : ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes*, éd. par Eduard Bernoulli, Rudolf Bernoulli, Ferdinand Rubio *et al.*, Teubner, Leipzig et Berlin, 1926. (*Opera omnia,* series 3 : *Opera physica miscellanea epistolae,* vol. 1).

FICHANT, Michel [1998]. *Science et métaphysique dans Descartes et dans Leibniz,* Presses Universitaires de France, Paris, 1998.

FRAZER, Craig G. [1983]. J. L. Lagrange's early contributions to the principles and methods of mechanics, *Archive for History of Exact Sciences*, 28, n°3, 1983, 197-241 ; repr. *in* . Frazer, Craig G. [1997], VIII, 197-241.

FRAZER, Craig G. [1998]. *Calculus and Analytical Mechanics in the Age of Enlightenment*, Variorum, Ashgate, Aldershot (G-B), 1997.

GALILEE (GALILEI), Galileo [1638]. *Discorsi e dimostrazioni mathematiche in torno di due nuove scienze*, Leyde, 1638 ; ré-éd., avec introd; et notes, par A. Carugo et L. Geymonat, Boringhieri, 1958. Trad. fr. par Maurice Clavelin, *Dialogues sur deux sciences nouvelles,* trad. A. Colin, Paris, 1970.

GALILEE (GALILEI), Galileo [1890-1909]. *Le Opere*, éd. Naz, Firenze, 20 vols. en 21 tomes, 1890-1909.

GRIMBERG, Gérard et PATY, Michel [à paraître]. L'origine hydrodynamique du principe de d'Alembert.

GUSDORF, Georges [1971]. *Les principes de la pensée au siècle des Lumières,* Payot, Paris, 1971. (*Les sciences humaines et la pensée occidentale*, 4).

HANKINS, Thomas L. [1970]. *Jean d'Alembert, science and the enlightenment,* Oxford University Press, Oxford, 1970.

LAGRANGE, Louis Joseph [1788]. *Mécanique analytique*, Paris, 1788 ; 4è éd. (posth.), de 1753, 2 vols., *in* Lagrange [1867-1892], *Oeuvres*, vols. 11 et 12, 1888 et 1889.

LAGRANGE, Louis Joseph [1867-1892]. *Oeuvres*, publiées sous la dir. de J.A. Serret (vols 1-10 et 13) et Gaston Darboux, 14 vols, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892.

MAC LAURIN, Colin [1742]. *A treatise of fluxions*, London, 1742.

MICHEL, Alain et PATY, Michel (éds.) [2002]. *Analyse et dynamique. Etudes sur l'œuvre de d'Alembert*, Presses de l'Université Laval, Québec, 2002.

MOUY, Paul [1927]. *Les lois du choc des corps d'après Malebranche,* Vrin, Paris, 1927.

NAKATA, Ryoichi [sous presse]. Concept of force in Jean Le Rond D'Alembert, *Revue d'histoire des mathématiques,* sous presse.

NAKATA, Ryoichi [2002]. The general principles for resolving mechanical problems in d'Alembert, Clairaut and Euler, *Historia Scientiarum*, 12, n°1, 2002, 18-42.

NEWTON, Isaac [1670-1671]. *Tractatus de methodis serierum infinitarum et fluxionem* (rédigé pdt l'hiver 1670-1671, publié en latin en 1779) ; trad. angl., *A treatise of the methods of series and fluxions*, publiée par John Colson, en 1736; *in* Newton (1967-1981), vol. 3, 1969, p. 32-353; trad. fr. par Georges Louis Leclerc de Buffon, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, 1740, ré-impr., Blanchard, Paris, 1966.

NEWTON, Isaac [1684-1686]. *De Motu Corporum* (automne 1684) et versions révisées (1685-1686), in I. N. *Mathematical papers*, vol. 6 (1684-1689) : *Fundamental Investigations on the Motion of Bodies*, p. 30-455.

NEWTON, Isaac [1687]. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 1687; 2ème éd., 1713; 3ème éd., 1726, éditée avec des variantes par Alexandre Koyré et I.B. Cohen, Cambridge University Press, Cambridge, 1972. *Mathematical principles of natural philosophy*, trad. angl. (d'après la 3è éd.) par Andrew Motte (1729), rév. and éd. by Florian Cajori, University of California Press, Berkeley, 1934, ré-impr., 1962, 2 vols.

NEWTON, Isaac [1967-1981]. *The mathematical papers of sir I.N.*, éd. par Derek T. Whiteside, Cambridge University Press, Cambridge, 8 vols., 1967-1981.

PASSERON, Irène [1994]. *Clairaut et la figure de la Terre au dix-huitième siècle. Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, Thèse de doctorat en Epistémologie et Histoire des sciences, Université Paris 7-Denis Diderot, 19.12.1994.

PATY, Michel [1977]. *Théorie et pratique de la connaissance chez Jean d'Alembert*, Thèse de doctorat en philosophie, Université des Sciences Humaines, Strasbourg-2, 1977.

PATY, Michel [1984]. Rapport des mathématiques et de la physique dans la pensée de d'Alembert, *Dix-huitième siècle*, n° 16, 1984 (numéro sur: *D'Alembert et les sciences de son temps*), p. 69-79.

PATY, Michel [1989]. D'Alembert et la théorie physique, *in* Emery, Monique; Monzani, Pierre (eds.), *Jean d'Alembert, savant et philosophe: portrait à plusieurs voix*, Archives contemporaines, Paris, 1989, p. 233-260.

PATY, Michel [1994a]. Le caractère historique de l'adéquation des mathématiques à la physique, *in* Garma, Santiago; Flament, Dominique; Navarro, Victor (eds.), *Contra los titanes de la rutina.- Contre les titans de la*, Comunidad de Madrid/C.S.I.C., Madrid, 1994, p. 401-428.

PATY, Michel [1994b]. Sur l'histoire du problème du temps : le temps physique et les phénomènes, *in* Klein, Etienne et Spiro, Michel (éds.), *Le temps et sa flèche*, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1994, p. 21-58 ; 2è éd., 1995 ; Collection Champs, Flammarion, Paris, 1996, p. 21-58.

PATY, Michel [1997]. «Mathesis universalis» et intelligibilité chez Descartes, Trad. en esp. par Martha C. Bustamante, «Mathesis universalis» e inteligibilidad en Descartes, Trad. *in* Albis, V. R. ; Charum, J. ; Sanchez, C. H. ; Serrano, G. (eds.), *Memorias del Seminario en conmemoración de los 400 años del nacimiento de René Descartes*, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Coleccion Memorias, n°9, Bogotá, 1997, p. 135-170. Trad. en port. par Maria A. Corrêa-Paty, «Mathesis universalis» e inteligibilidade em Descartes, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* (Campinas), Série 3, vol. 8, 1998 (n°1, jan.-jun.), 9-57. Original en français, *in* Chemla, K., Probst, S., Erdély A. et Moretto, A. (éds.), *Ceci n'est pas un festschrift pour Imre Toth*, à paraître.

PATY, Michel [1998]. Les trois dimensions de l'espace et les quatre dimensions de l'espace-temps*in* Flament, Dominique (éd.), *Dimension, dimensions I*, Série Documents de travail, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 1998, p. 87-112.

PATY, Michel [1998b]. La philosophie et la physique, *in* Jean-François Mattéi (éd.), *Le Discours philosophique*, volume 4 de l'*Encyclopédie philosophique universelle*, Presses Universitaires de France, Paris, 1998, chap. 123, p. 2104-2122.

PATY, Michel [2001a]. D'Alembert, la science newtonienne et l'héritage cartésien, *Corpus* (revue de philosophie, Paris), n°38 : *D'Alembert* (éd. par Markovitz, Francine et Szczeciniarz, Jean-Jacques), 2001, 19-64.

PATY, Michel [2001b]. La notion de grandeur et la légitimité de la mathématisation en physique, *in* Espinoza, Miguel (éd.), *De la science à la philosophie. Hommage à Jean Largeault*, L'Harmattan, Paris, 2001, p. 247-286.

PATY, Michel [2002a]. Les recherches actuelles sur d'Alembert. A propos de l'édition de ses *Oeuvres complètes*, *in* Michel et Paty [à paraître].

PATY, Michel [à paraître]. Principes de la mécanique et analyse chez d'Alembert. Le point de vue conceptuel, à paraître.

RASHED, Roshdi (éd.) [1988]. *Sciences à l'époque de la Révolution française. Recherches historiques*, Blanchard, Paris, 1988.

TRUESDELL, C. [1968]. *Essays in the History of Mechanics*, 1968.

VARIGNON, Pierre [1714]. Réflexions sur l'usage que la mécanique peut avoir en géométrie, *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1714, 77-121.

VARIGNON, Pierre [1725]. *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniments petits* (écrit posthume), Paris, 1725.

VIARD, Jérôme [à paraître]. Le principe de d'Alembert et la conservation du «moment cinétique» d'un système de corps isolés dans le *Traité de dynamique*, à paraître.

VIARD, Jérôme et YOUSSOUF, Ismael [1997]. Les relations entre élasticité et dureté dans le *Traité de dynamique* et dans l'*Encyclopédie* sont-elles compatibles ? Application à la «déduction» des lois du choc des corps élastiques de celle des corps durs, *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, n°22, avril 1997, 123-145.

VILAIN, Christiane [à paraître, a]. La question du centre d'oscillation de 1660 à 1700, *Physis*, à paraître.

VILAIN, Christiane [à paraître, b]. La question du centre d'oscillation de 1703 à 1743, *Physis*, à paraître.